Math. Appl.
7 m.

<36629084750018

<36629084750018

Bayer. Staatsbibliothek

R

Constructions-Lehre

mit ihren

Anwendungen

auf

Schatten-Construction, Perspectiv

und

Maschinenzeichnung,

als

Vorbereitung zu Monge's und Hachette's Werken.

Bayerische Staatsbibliothek München

Von

Joseph Arbesser,

Assistent der Maschinenlehre und Maschinenzeichnung am kaiserl. königl. polytechnischen Institute.

Mit sieben Kupfertafeln.

Wien,

gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1824.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
Bayerische Staatsbibliothek München

Seiner

Wohlgeboren

dem Herrn

Johannes Arzberger,

Professor der Maschinenlehre am kaiserl. königl. polytechnischen Institute zu Wien, und Mitgliede der kaiserl. königl. Gesellschaft des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde zu Brünn,

aus innigster

Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

von seinem Schüler

Joseph Arbesser.

Euer Wohlgeboren,

Hochzuverehrender Herr Professor!

Wohl darf ich es mir zu der schönsten Bahn rechnen, die ich nur hätte betreten können, so glücklich gewesen zu seyn, unter Ihrer Leitung, unter dem Genusse Ihres Beystandes mich für einen Theil der angewandten Mathematik auszubilden, der an Ihnen, hochzuverehrender Herr Professor, einen Mitarbeiter gefunden hat, durch den dieser so kostbare und unschätzbare Beyträge erhielt. Wohl fühle ich mich zu schwach, Sie durch Worte so zu würdigen, als es geschehen sollte, und hoffe, da der Starke des Schwachen Stütze ist, bauend auf Ihre Güte, daß Sie diesen meinen ersten Versuch mit jener Nachsicht aufnehmen werden, deren ein Anfänger in dieser Sache so sehr bedarf. Sollte ich so glücklich seyn, durch diese erste Arbeit nur in etwas meinen Wunsch erreicht

zu sehen, sollte er ein Gedeihen dieser Wissenschaft hervorbringen, o! so soll es mein einziger Wunsch, meine größte Freude seyn, Ihnen die Erstlinge der Früchte dankbarlichst anbiethen zu dürfen; denn Ihnen gebührt Alles, Alles was je durch die schwachen mir verliehenen Kräfte vielleicht Brauchbares durch meinen Fleiß und Mühe hervorgehen sollte, das so sehnlich ich wünsche und zu erreichen immer bestrebt seyn werde.

Euer Wohlgeboren
Herr Professor

unterthänigster
Arbesser.

Vorrede.

Zu bekannt sind die Schriften über Projections-Lehre der ausgezeichneten Männer, Monge und Hachette, und es wäre sehr entbehrlich, bey der Gediegenheit dieser Werke, diese Wissenschaft im Allgemeinen noch mit einem neuen dieser Gattung zu vermehren, wenn man durchgängig voraussetzen könnte, daß die Studierenden mit der Kenntniß der französischen Sprache vertraut, und Anfänger den Geist dieser Schriften zu fassen wüßten. Diese Abhandlung unternahm ich lediglich nur, um den Anfängern ein Mittel an die Hand zu geben, sich mit dieser Wissenschaft bekannt zu machen. Vieles wird man darin nur berührt finden; denn zur vollständigen Behandlung aller Gegenstände wäre das Zweckmäßigste die Übersetzung dieser Werke gewesen. Diejenigen, die in dieser so vervollkommneten Wissenschaft weiter schreiten wollen, können sich meiner vielleicht bald zu erscheinenden Übersetzungen dieser Werke bedienen. Streng genommen ist alles in dieser Abhandlung, und ein findiger Kopf wird die hier aufgestellten Sätze so zu benützen wissen, um die verwickeltsten Probleme genügend zu lösen.

Die in dieser Abhandlung enthaltenen Sätze sind daher nur als die für die Ausübung unentbehrlichsten Mittel anzusehen; die ferneren Theile dieser Wissenschaft, oder deren höherer Theil, ist das Betrachten der geregelten Oberflächen, den besonderen Untersuchungen über Tangirungen und Enveloppirungen von

Oberflächen u. dergl. Bey allen hier vorkommenden Constructionen war die Annahme der Projections-Ebenen beliebig; jedoch wurde bemerkt, daß, da die Wahl derselben beliebig ist, man oft durch eine schickliche Stellung derselben durch einfachere Constructionen zum Ziele gelangt; es ward daher gar nicht in Betracht gezogen, ob die Construction dadurch einfacher oder zusammengesetzter werde, und dieses aus dem Grunde, weil dieses der allgemeinste Fall ist, und beynahe in allen über diesen Gegenstand handelnden Schriften vermißt wird.

Da jedoch es für Anfänger sehr schwer fällt, sich die Lage der Ebenen zu versinnlichen, so befinden sich alle diese hier vorkommenden Figuren im Modelle vorhanden, wobey alle vorkommenden theils gegebenen Linien, theils Constructions-Linien, durch verschiedenfarbige Fäden angedeutet sind, um dadurch den mündlichen Vortrag gehörig zu unterstützen; und jedem Anfänger in dieser Wissenschaft ist zu rathen, beym Studium dieser Abhandlung sich die hierzu nöthigen Modelle aus Pappe selbst zu verfertigen.

In wie ferne dieser mein erster Versuch gelang, mögen Kenner beurtheilen; ich wollte nur durch einige darin aufgestellte Auflösungen von Problemen, die bis jetzt äußerst mühselig gelöst wurden, denen in dieser Sache Arbeitenden ein Mittel an die Hand geben, kürzer zum Zwecke zu gelangen, und zugleich Anfänger in den Stand setzen, durch vorläufiges Studium sich für die großen Werke dieser Wissenschaft vorzubereiten, um dadurch diese neuen von Monge und Hachette aufgestellten Principien der Projections-Lehre in Aufnahme zu bringen.

Wien, im März 1823.

Der Verfasser.

Einleitung.

Diejenige Wissenschaft, welche lehret wie Gegenstände, unter gewissen Umständen betrachtet, sich darstellen, um von jenen sich ein vollkommenes Bild machen zu können, das ist, um ihre Form und sonstigen Eigenthümlichkeiten besser aufzufassen, heißt Projections-Lehre. Diese Wissenschaft erfordert aber nebst der Kenntniß ihrer Grundsätze auch noch eine mechanische Zeichnungsfertigkeit, theils zum besseren Gelingen der Constructionen selbst, theils auch dazu, wo es nicht gerade Zweck ist, die richtigste Darstellung eines Körpers, sondern nur eine ohngefähre, wie z. B. bey einer Skizze, zu geben. Diese ohngefähre muß durch die vor Augen habende construirte geschaffen werden; das heißt, man muß aus der Construction wissen, wie sich ein Körper unter ähnlichen Verhältnissen darstellt, um denselben dann, wenn es Umstände erfordern, ohne Hülfe der Construction alsogleich darstellen zu können.

Diese Projections-Lehre und die Analyse sind innig mit einander verwebt; letztere gibt ersterer Wahrheit, und erstere letzterer Klarheit; sehr wünschenswerth wäre es, wenn jene, welche die analytische Geometrie zu ihrem Studium wählen, sich früher mit der Projections-Methode vertraut machten. Weiß einer z. B. sich die bildliche Vorstellung von zwey sich schneidenden Cylindern zu machen, gewiß wird es ihm dann ungleich leichter, auf die Gleichung des Durchschnittes beyder cylindrischen Oberflächen zu kommen.

Diejenigen Schriften im Deutschen, die sich bemühten, die Projections-Lehre gemeinnützig zu machen, verfehlten ihren Zweck damit *), daß sie wohl eine Beyspielsammlung von Constructionen lieferten, jedoch die Grundsätze nicht aufstellten, nach denen sich im Allgemeinen zu richten sey, und jeder Unparteyische wird gestehen müssen, daß diese Wissenschaft am vollkommensten durch die hochgeachteten Herren Monge und Hachette in ihrer »Géométrie descriptive« am ausführlichsten durchgeführt wurde. Theils die Kostbarkeit dieser Werke, theils die Unkenntniß vieler Studierenden in der französischen Sprache, und die diesen mangelnde Erfahrung, die in diesen Werken enthaltenen Grundsätze auf die Anwendung schicklich überzutragen, bestimmten mich, eine Übersetzung von Monge und Hachette's Werken wohl zu unternehmen, jedoch noch nicht herauszugeben, weil sie nur als Werke anzusehen sind, sich die höchste Ausbildung zu verschaffen; sondern eine kleine Abhandlung nach den Grundsätzen dieser Herren, zum ersten Begründen der technischen Zeichnung.

Nach diesen Grundsätzen wird bey den Constructionen das Gesetz der Entstehung der Oberflächen mit benützt, und nur durch diese Annahme können viele Aufgaben gelöst werden.

Der Gang, der in dieser Abhandlung genommen werden soll, wird folgender seyn:

I. Allgemeine Principien der Projections-Lehre.

II. Allgemeine Betrachtungen über die Oberflächen, insbesondere der konischen und cylindrischen, als nachmahliger Begründung der Beleuchtung bey Lampen- und Sonnenlicht. Von den Enveloppirungen (Einhüllungen), Tangirungen (Berührungen), und Developpe-

*) Herr Creizenach in seiner sehr schätzbaren »darstellenden Geometrie,« Mainz bey Kupferberg 1821, hat das große Verdienst der ersten Bekanntmachung dieser neuen Principien im Deutschen.

ments (Ausbreitungen); Durchschnitte von Oberflächen. Construction der Schatten sammt Bemerkungen über das Behandeln derselben; Fixpuncte, Glanzpuncte, Glanzkanten; Reduction der Schatten. Beyspiele.

III. Perspectiv.

IV. Von den in Maschinenzeichnungen nöthigen Constructionen, dem Behandeln jener, und der Aufnahme von Maschinen.

Gegebene Linien, oder Tracen von Ebenen wurden durch stark ausgezogene Contouren ausgedrückt, um sie von den Linien und Ebenen zu unterscheiden, die bloß als zur Construction gehörig, dienen. Hauptpuncte, sowohl gegebene, als aus der Construction sich ergebende, wurden mit einem Sternchen bezeichnet. Bey der Construction selbst bediente man sich mehrerer Gattungen Constructions-Linien, so z. B. gestrichelter Linien mit einem, zwey u. s. w. darzwischen gesetzten Puncten; und jede Gattung Linien bezieht sich auf die Construction eines Theiles der Hauptaufgabe, in so ferne diese aus mehreren einzelnen Aufgaben zusammengesetzt ist.

Puncte werden immer durch zwey durch einen Beystrich abgesonderte kleine Buchstaben angedeutet, und diese stellen immer die Projectionen derselben dar, ersterer die horizontale, letzterer die vertikale, z. B. a, a'. Die Linie wird durch vier je zwey durch einen Beystrich abgesonderte Buchstaben angedeutet, wo die ersten zwey die horizontale, die zwey anderen die vertikale Projection derselben andeuten, z. B. ab, a'b'. Die Ebene endlich wird durch drey große Buchstaben ausgedrückt, von denen der in der Mitte stehende sich auf dem Durchschnitte beyder Tracen und der Projections-Achse, der erste auf die vertikale, der letzte auf die horizontale Trace bezieht.

I.

Allgemeine Principien der Projections-Lehre.

In der analytischen Geometrie bedarf man dreyer Coordinaten-Ebenen, um die Lage eines Punctes, einer Linie oder Ebene zu bestimmen, weil es sich hier um die genaue Bestimmung des Ortes handelt. In der Projections-Lehre hingegen reicht man mit zwey Coordinaten-Ebenen aus, da es für uns ganz gleichgültig ist, an welchem Ort ein Körper sich befindet, wenn wir nur solche Hülfsmittel besitzen, uns von der Form des Körpers ein vollständiges Bild machen zu können, das heißt die Länge, Breite und Höhe des Gegenstandes anzugeben im Stande sind.

Die beyden rechtwinkelig unter sich angenommenen Ebenen, von welchen eine als horizontal, die andere als vertikal vorausgesetzt wird, und darnach benannt werden, heißen Projections-Ebenen, und ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt Projections-Achse. Es kömmt nun darauf an, diese beyden Projections-Ebenen auf einem einzigen Zeichnungsblatte darzustellen. Um dieses zu bewerkstelligen, lasse man die vertikale Projections-Ebene um die Projections-Achse drehen, bis sie mit der Horizontal-Ebene zusammenfällt; daher ist bey einer zu verfertigenden Zeichnung das Erste, auf dem Zeichnungsblatte eine, die Projections-Achse vorstellende Gerade zu ziehen. Linien und Ebenen denkt man sich im Allgemeinen, so lange nicht von Begränzung die Rede ist, unbegränzt; die vertikale Projections-Ebene geht

daher so wie die Horizontal-Ebene dieß- und jenseits der Projections-Achse; mithin stellt der oberhalb der Projections-Achse sich befindliche Theil sowohl die Vertikal- als Horizontal-Ebene, und der unterhalb sich befindliche Theil sowohl die Horizontal- als Vertikal-Ebene vor.

Wir haben es mit Puncten, Linien (die sowohl gerade als krumme seyn können; doch unter Linie im Besonderen versteht man immer eine gerade Linie), Oberflächen und Körpern zu thun; ein Punct ist das, was keine Theile hat, oder das absolut Einfache; durch die Bewegung desselben nach irgend einem stätigen oder unstätigen Gesetze entsteht die Linie im Allgemeinen; durch die Bewegung der Linie entsteht die Oberfläche, und durch die Bewegung dieser die Körper. Für die Eigenschaften der Oberflächen ist die Betrachtung der Ebene die wichtigste, und es handelt sich nun, Ausdrücke für den Punct, die Linie, die Ebene und die Oberflächen im Allgemeinen zu finden. Entsteht durch die Bewegnng eines Punctes eine Linie, deren Tangenten alle in eine und dieselbe Gerade fallen, so heißt die Linie eine gerade Linie oder Gerade, sonst aber eine Curve; und diese kann eine stätige oder unstätige seyn, je nachdem alle ihre Puncte oder nur einige nach demselben Gesetz gebildet sind. Diese Curven sind wieder von zweyfacher Art, entweder liegen ihre Puncte alle in einer Ebene, oder in verschiedenen; im ersten Falle heißt sie einfach, im zweyten doppelt gekrümmt. Ein Kreis in seiner Ebene stellt eine Curve von einfacher Krümmung vor, wird er aber z. B. auf einen Kegel gelegt, so nimmt er nebst seiner Krümmung noch eine vor der des Kegels an, und es entsteht eine Curve von doppelter Krümmung. Im Allgemeinen gehört jede Curve zum Geschlechte der von doppelter Krümmung, denn jede in einer Ebene befindliche Curve befindet sich auf einer Kugel, deren Halbmesser unendlich groß ist. Dieses Hervortreten der Ebene gehört aber gar nicht in unsere Untersuchungen,

sondern wir lassen dieselbe auf eine für uns anwendbarere Art, wie die Folge zeigen wird, entstehen; die erste Entstehungsart kann aber in so ferne mit aufgenommen werden, als jeder Durchschnitt auf einer Ebene durch eine Oberfläche mit zwey verschiedenen andern (nähmlich mit der Ebene nach ihren beyden Entstehungsarten) sich ergibt.

Ist ein Punct a, a′ im Raume gegeben, so fälle man aus ihm auf beyde Projections-Ebenen Perpendikel (Projections-Linien) ac, a′c und die Begegnungen a und a′ dieser mit den respectiven Projections-Ebenen heißen die Projectionen des gegebenen Punctes.

Aus diesem folgt nun, daß wenn die beyden Projectionen durch eine gerade Linie aa′ verbunden werden, dieselbe auf die Projections-Achse perpendikulär steht; denn legt man durch die beyden Projections-Linien eine Ebene, so schneidet diese die beyden Projections-Ebenen nach zwey auf die Projections-Achse XY (unter XY wird immer die Projections-Achse verstanden werden) perpendikulären Geraden ac und a′c, die mit derselben einen gemeinschaftlichen Punct haben; durch die Umlegung der vertikalen Projections-Ebene bilden diese zwey erwähnten Geraden, da die Bewegung der Vertikal-Ebene in der Richtung der Bewegung des in ihr enthaltenen Durchschnittes geschieht, und beyde Durchschnitte einen gemeinschaftlichen Punct haben, Fig. 1. eine einzige Gerade. Fig. 1.

Soll eine Linie projicirt werden, so legt man durch dieselbe auf jede der beyden Projections-Ebenen eine perpendikuläre Ebene (Projections-Ebene der Linie), die Durchschnitte xy und x′y′ dieser Ebenen mit den Projections-Ebenen sind die Projectionen der Linie. In so ferne man bloß von der Linie im Allgemeinen spricht, denkt man sich dieselbe, wie schon bemerkt worden, als unbegränzt; es kann aber Fälle geben, wo es sich handelt, aus den beyden begränzten Projectionen ab, a′b′ einer Geraden die wahre Länge derselben

zu bestimmen; von diesen Fällen wäre einer der, aus einem verkürzten Schatten, die wahre Größe desselben, auf seiner ihm zugehörigen Oberfläche zu finden. Um die wahre Länge der durch ihre Projectionen ab, a′b′ gegebenen Geraden zu bestimmen, denke man sich durch die Endpuncte der im Raume liegenden Geraden, deren Projectionen a, a′ und b, b′ sind, unbegränzte Parallelen zur Horizontal-Ebene, und eben so auch durch dieselben Parallele zur Vertikal-Ebene. Auf diese Art entsteht ein Rechteck, dessen Diagonale die im Raume gegebene Gerade ist; die Projection des erhaltenen Rechteckes ist dann ab, a′b′a″b″. Vermöge der Projectionen sind aber beyde Katheten a′a″ und a′b″ der zwey so erhaltenen rechtwinkeligen Dreyecke bekannt; die eine ist gleich der horizontalen Projection ab der gegebenen Geraden, die andere gleich der Differenz a′a″ der vertikalen Projectionen der Endpuncte derselben. Wäre die Differenz der vertikalen Projectionen gleich Null, so ist die Gerade zur Horizontal-Ebene parallel, und ihre Projection auf derselben gleich ihrer wahren Größe. Eben solche Schlüsse lassen sich machen, wenn die gegebene Gerade mit der Vertikal-Ebene oder mit beyden zugleich parallel, oder auf eine der Projections-Ebenen perpendikulär, mithin zur anderen parallel wäre. Fig. 2. Fig. 2.

Für die nachmahlige Anwendung ist es von der größten Wichtigkeit, angeben zu können, in welchen Puncten eine durch ihre Projectionen gegebene Gerade die beyden Projections-Ebenen trifft; diese Puncte heißen Durchgänge.

Das Kennzeichen, daß eine Gerade ab, a′b′ die Horizontal-Ebene trifft, ist, daß die vertikale Projection c des Durchganges in der Projections-Achse liegt, mithin um den horizontalen Durchgang einer Geraden zu finden, verlängere man deren vertikale Projection bis an die Projections-Achse in c; von diesem Durchschnitt als der vertikalen Projection des Durchganges schließe man auf dessen

horizontale Projection, welches geschieht, wenn man den Durchschnitt c′ des durch den Punct c errichteten Perpendikels cc′ mit der horizontalen Projection ab der gegebenen Geraden sucht.

Anmerkung. Diese ortogonale Projection, oder die Projection durch perpendikuläre Geraden, ist eben so wenig unumgänglich nöthig, wie die Annahme zweyer unter sich perpendikulärer Projections-Ebenen; und die Ursache der Einführung von beyden ist nur die Bequemlichkeit, wie es auch in der Analyse am schicklichsten ist, die Untersuchungen auf rechtwinkelige Coordinaten-Ebenen und Coordinaten zu beziehen.

Aus früher Gesagtem folgt schon die Willkür der Annahme der Lage der Projections-Ebenen, und in der Ausführung wird man dann die Wahl derselben so treffen, daß die Constructionen dadurch am einfachsten werden. Diese schickliche Wahl der Projections-Ebenen wird sich aber am wohlthätigsten bey den krummen Oberflächen zeigen, besonders wenn man sich bey diesen, Hülfs-Ebenen bedient, durch welche dieselben geschnitten werden; hierbey ist es immer am zweckmäßigsten, die Annahme dieser so zu begründen, daß in den Projectionen die verschiedenen Schnitte der Oberflächen durch die Ebenen, Kreise werden, welches immer leicht dadurch möglich wird, wenn die Annahme so geschieht, daß, nach was immer für einer angenommenen Lage der Projections-Linien, die Durchgänge von vier so gezogenen Projections-Linien mit einer der beyden Projections-Ebenen dergestalt mit einander verbunden, zwey auf einander perpendikuläre, durch den Mittelpunct der Projection des Schnittes gehende und gleiche Geraden darstellen; diese Projection kann nun durch Pendikel, oder aber durch unter sich parallele, oder auch nach einem Puncte gehende Projections-Linien geschehen.

Bey dieser Abhandlung aber bekümmerte man sich um die Lage der Projections-Ebenen gar nicht, sie wurde

immer beliebig angenommen, und jeder wird diejenige Annahme, die auf leichtere Projectionen führt, durch welche die Schnitte von Oberflächen als gerade Linien oder Kreise erscheinen, von selbst finden. Soll der vertikale Durchgang gefunden werden, so liegt derselbe mit dem Durchschnitte der horizontalen Projection der Geraden und der Projections-Achse in einer auf letzterer perpendikulärer Geraden; um daher diesen vertikalen Durchgang zu erhalten, verlängere man die horizontale Projection bis an die Projections-Achse in c′′, und suche den Durchschnitt des in diesem Puncte auf dieselbe errichteten Perpendikels c′′ c′′′ mit der genugsam verlängerten vertikalen Projection der gegebenen Geraden; und c′′, c′′′ werden die Projectionen des vertikalen Durchganges der gegebenen Geraden seyn; die Projectionen der Durchgänge der gegebenen Geraden ab, a′b′ sind c′, c für die horizontale Projections-Ebene, und c′′, c′′′ für die vertikale. Die Folgerungen der Eigenschaften des Durchganges, wenn die gegebene Gerade parallel zu einer oder beyden Projections-Ebenen, oder auf eine derselben perpendikulär ist, lassen sich leicht selbst bestimmen. Fig. 3. Fig. 3.

Es wurde bis jetzt gezeigt, auf welche Art man Puncte und Linien durch ihre Projectionen darstellt, und es bleibt uns noch die Darstellung einer Ebene übrig.

Die Ebene ist die einfachste und eben deßwegen die gebräuchlichste Oberfläche. Man denke sich die Ebene so weit verlängert, bis sie beyde Projections-Ebenen schneidet, ihre beyden Durchschnitte CA, CB mit denselben heißen Tracen (Spuren). Fig. 4. Diese beyden Tracen schneiden sich in einen in der Projections-Achse liegenden gemeinschaftlichen Punct; daß dieses Statt haben muß, wird sich aus der Entstehung der Ebene erklären lassen. Man nehme eine beliebige Gerade und lasse an ihr eine andere Gerade parallel mit sich selbst bewegen, und denke sich die Fig. 4.

bewegliche Gerade in ihren verschiedenen Lagen, dieselbe wird endlich in den Begegnungspunct der ersten Geraden mit der vertikalen Projections-Ebene treten, und nun lege man durch erstere Gerade und die bewegliche in ihrer letzten Lage eine Ebene, und suche den Durchschnitt dieser mit der Projections-Achse; derselbe gehört beyden Projections-Ebenen an, und von ihm aus gehen die Durchschnitte der gelegten Ebene mit den Projections-Ebenen.

I. Aufgabe. Aus den Tracen CA, CB einer Ebene ACB den projectirten und wahren Neigungswinkel der Ebene gegen die beyden Projections-Ebenen finden.

Auflösung. Denkt man sich in der Horizontal-Ebene z.B. einen Punct a, und errichtet durch diesen auf dieselbe ein Perpendikel, so wird dieses die Ebene treffen; es frägt sich nun, den Durchgang desselben mit der gegebenen Ebene zu finden. Man nehme den Durchgang indessen als bekannt an, und führe durch denselben in der gegebenen Ebene eine Horizontale so weit, bis sie die Vertikal-Ebene in der vertikalen Trace trifft; alle von dieser Horizontalen auf die Horizontal-Ebene gefällten Perpendikel sind gleich groß, und die horizontale Projection der erwähnten Geraden ist zur horizontalen Trace parallel; führt man daher durch die horizontale Projection des gegebenen Punctes eine Parallele ab zur horizontalen Trace, und errichtet von ihrem Durchschnitt b mit der Projections-Achse ein Perpendikel bis zum Durchschnitt mit b′ der vertikalen Trace, so ist die Größe dieses Perpendikels bb′ die Höhe, in welcher das durch den gegebenen Punct auf die Horizontal-Ebene errichtete Perpendikel die gegebene Ebene trifft. Dieses Perpendikel auf die Projections-Linie des gegebenen Punctes übertragen, gibt die vertikale Projection bb′ des gesuchten Durchganges a, a′. Es wird nun ein Leichtes seyn, den wahren Nei-

gungswinkel der Ebene gegen die horizontale Projections-Ebene zu bestimmen. Der Neigungswinkel zweyer Ebenen wird wie bekanntlich gefunden, daß man im Durchschnitt beyder Ebenen einen beliebigen Punct annimmt, und durch diesen auf jenen zwey in beyden Ebenen liegende Perpendikel fällt, der durch diese gebildete Winkel ist der Neigungswinkel beyder Ebenen. Man nehme nun in der Horizontal-Ebene einen beliebigen Punct, am einfachsten in der Projections-Achse selbst, weil alsdann alsogleich das von diesem Puncte auf die Projections-Achse bis zum Durchschnitt mit der vertikalen Trace der Ebene gefällte Perpendikel die Höhe ist, in welcher dasselbe die gegebene Ebene trifft, und errichte durch denselben in dieser auf die horizontale Trace ein Perpendikel ac, suche ferner die Höhe, in welcher die Ebene durch das in den angenommenen Punct auf die Horizontal-Ebene errichtete Perpendikel getroffen wird, und verbinde die Durchgangs-Puncte dieser zwey Perpendikel mit der gegebenen Ebene durch eine Gerade ac, a′c′; man erhält auf diese Art ein rechtwinkeliges Dreyeck, dessen Projectionen ac und a′c′d sind, und dessen eine Kathete die gefundene Höhe, die andere aber der Abstand des gegebenen Punctes von der horizontalen Trace ist; der durch die Hypothenuse ac, a′c′ dieses Dreyeckes, welche dadurch hervorgeht, daß man die Durchgänge der beyden gefällten Perpendikel mit der gegebenen Ebene durch eine Gerade verbindet, und diese letztere Kathete ca gebildete Winkel ist der gesuchte Neigungswinkel. Sollten die Projectionen des Neigungswinkels gefunden werden, so dürfte bloß der Durchschnitt des von dem gegebenen Puncte auf die horizontale Trace gefällten Perpendikels mit letzterer auf die Projections-Achse projicirt, und die vertikale Projection des anderen Durchganges bestimmt werden; beyde Projectionen c′ und a′ verbunden, gäben die Projection der oberwähnten Hypothenuse, und die Neigung dieser Projection gegen die

Projections-Achse, die Projection des Neigungswinkels. Der wahre Neigungswinkel ergäbe sich durch die wirkliche Construction des erwähnten rechtwinkeligen Dreyeckes, dessen beyde Katheten bekannt sind; man dürfte nur aus a mit ac als Halbmesser einen Bogen cd beschreiben, und ad parallel zur Projections-Achse führen; wird d nach d'' projicirt, und d''a' gezogen, so ist der durch a'd'' und die Projections-Achse gebildete Winkel a'd'' Y der gesuchte Neigungswinkel, dessen vertikale Projection der Winkel a'c' Y ist.

Für die nachmahlige Anwendung ist es von der größten Wichtigkeit, aus einem verkürzten Winkel den wahren, und umgekehrt zu finden; wie dieses die Untersuchungen über Beleuchtungen näher zeigen sollen.

Sind zwey Ebenen gegeben, und soll ihr Neigungswinkel bestimmt werden, so dürfte nur der Neigungswinkel der ersten gegen irgend eine Projections-Ebene, und der der zweyten gegen dieselbe gesucht, und die Differenz beyder genommen werden. Das früher aufgestellte Verfahren, den Neigungswinkel einer Ebene gegen die Horizontal-Ebene zu finden, gilt auch für die Neigung einer Ebene gegen die
Fig. 5. vertikale Projections-Ebene. Fig. 5.

II. Aufgabe. Die Tracen CA, CB einer Ebene ACB und auch die Projectionen einer Geraden ab, a'b' sind gegeben, man soll die Durchgänge letzterer mit ersterer finden.

Auflösung. Man nehme in der horizontalen Projection der gegebenen Geraden zwey beliebige Puncte c und c', und errichte in diesen Perpendikel auf diese horizontale Projections-Ebene, und suche ihre Durchgänge mit der gegebenen Ebene; diese beyden Durchgangspuncte d und d' durch eine Gerade verbunden, geben eine Linie, welche die Eigen-

schaft hat, sowohl in der Projections-Ebene der gegebenen Geraden, als auch in der gegebenen Ebene zu liegen; ihr Durchschnitt e, e′ mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Begegnungspunct. Man hätte eben so füglich die vertikale Projections-Ebene der gegebenen Geraden benützen können. Die Arbeit vereinfacht sich, wenn zu dem einen der zwey anzunehmenden Puncte man jenen wählt, in welchen eine Projection der gegebenen Geraden die correspondirende Trace trifft, weil man dann nicht nöthig hat, die Höhe zu suchen, in welcher das durch diesen Punct auf die entsprechende Projections-Ebene errichtete Perpendikel die gegebene Ebene trifft. Fig. 6. Fig. 6.

III. Aufgabe. Zwey Ebenen ACB, A′C′B′ sind durch ihre Tracen gegeben, man soll die Projectionen ihres Durchschnittes construiren.

Auflösung. Man suche die Durchschnitte c und c′ der beyden horizontalen und vertikalen Tracen; die so erhaltenen beyden Durchschnitte gehören dem Durchschnitte der beyden Ebenen an. Denkt man sich nun jene auf die Projections-Achse nach d und d′ projicirt, und die so erhaltenen Projectionen mit den respectiven Tracen-Durchschnitten c und c′ verbunden, so ergeben sich die gesuchten Projectionen des Durchschnittes cd′, c′d beyder Ebenen. Fig. 7. Fig. 7. Sehr häufig kann es aber geschehen, daß diese Tracen sich außerhalb des Zeichnungsblattes schneiden; in diesem Falle kömmt es darauf an, nur zwey Puncte von jeder der beyden Projectionen des Durchschnittes zu erhalten. Zu diesem Behufe nehme man in einer beliebigen der beyden Ebenen ACB, A′C′B′, z. B. in der ersteren, zwey in ihr liegende Geraden ab, a b′; cd, c′d′; und suche deren Durchgänge e, e′, f, f′ mit der anderen Ebene; die beyden Projectionen dieser zwey Durchgangspuncte in den respectiven Projections-

Ebenen durch eine Gerade verbunden, geben die gesuchten Pro-
Fig. 8. jectionen des Durchschnittes ef, e'f' beyder Ebenen. Fig. 8.

Anmerkung. Beym Bestimmen der Durchgänge einer Geraden ab, a'b' mit den beyden Projections-Ebenen scheint die oben angegebene Methode in dem Falle nicht anwendbar zu seyn, wenn die beyden Projectionen der Geraden in ein und derselben auf die Projections-Achse perpendikulären Geraden liegen. In diesem Falle denke man sich die Projections-Ebene der gegebenen Geraden um ihre vertikale Trace so bewegt, bis sie mit der vertikalen Projections-Ebene zusammenfällt. Man übersieht wohl, daß es unendlich viele, der Lage nach verschiedene Geraden geben könnte, die alle die zwey oben gegebenen unbegränzten Projectionen zu ihren Projectionen haben können. Es müssen daher nothwendiger Weise, wenn anders die Gerade gegeben seyn soll, die Projectionen zweyer ihrer Puncte bestimmt seyn. In der neuen Lage der Projections-Ebene der gegebenen Geraden construire man sich nun die wahre Lage derselben, wodurch sich ihre Durchgänge e, f sehr leicht ergeben, und die Projectionen derselben dann auf die ihnen zukommenden Orte e
Fig. 9. und e' übertragen werden können. Fig. 9.

Sind zwey Linien ab, a'b' und cd, c'd' durch ihre Projectionen gegeben, so folgt noch nicht, daß, obschon sich ihre respectiven Projectionen schneiden, sich die Linien selbst schneiden; das Kennzeichen, daß sich Linien schneiden, ist, wenn die erfolgten respectiven Durchschnitte n', n'' der Projectionen durch eine Gerade verbunden, letztere auf die Projections-Achse perpendikulär steht; denn schneiden sich beyde Geraden, so gehört der Durchschnittspunct sowohl beyden wirklichen Geraden, als auch den Durchschnitten der respectiven Pro-
Fig. 10. jectionen an. Fig. 10.

IV. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct a, a' zu einer gegebenen Geraden ab, a'b' eine Parallele führen.

Auflösung. Man führe durch den gegebenen Punct zu den respectiven Projectionen der gegebenen Geraden Pa-
Fig. 11. rallele, so erhält man das Verlangte. Fig. 11.

V. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade ab, a′b′ zu einer anderen gegebenen Geraden cd, c′d′ eine parallele Ebene führen, und deren Tracen bestimmen.

Auflösung. Die gesuchte Ebene wird dadurch erzeugt, daß man die erste Gerade parallel zu sich selbst an der zweyten bewegen läßt; man nehme daher auf der ersten Geraden einen beliebigen Punct e, e′ an, und führe durch denselben eine Gerade parallel mit der zweyten, und suche die Durchgänge der so geführten Geraden und der ersten gegebenen mit den beyden Projections-Ebenen. Die respectiven Durchgänge m, m′, m″ durch Gerade verbunden, geben die Tracen AC und CB. Sind die horizontalen Durchgänge bestimmt, so ist es nicht nöthig, die beyden vertikalen Durchgänge, sondern nur einen zu bestimmen, weil die horizontale und vertikale Trace jeder Ebene sich in demselben Puncte der Projections-Achse schneidet. Fig. 12. Fig. 12

VI. Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade ab, a′b′ und einen gegebenen Punct c, c′ eine Ebene legen, und deren Tracen bestimmen.

Auflösung. Man lege durch den gegebenen Punct und durch einen beliebigen Punct d, d′ der gegebenen Geraden eine Gerade, und suche nun die Tracen der Ebene, welche durch diese beyden Geraden geht. Um dieses zu bewerkstelligen, dürften nur die horizontalen Durchgänge m, m′ beyder Geraden, und der vertikale Durchgang m″ der einen von ihnen gesucht werden. Es kann sich der Fall ergeben, daß irgend ein Durchgang der ersten gegebenen Geraden zu weit fiele, in diesem Falle ist es dann zweckmäßiger, durch den gegebenen Punct a, a′ und durch zwey auf der ebenfalls gegebenen Geraden bc, b′c′ angenommene Puncte zwey Gerade ae a′e′ und ad′ a′d′ zu legen, und die Tracen der

durch diese zwey Graden gelegten Ebenen zu bestimmen. Auch ließe sich die Aufgabe dadurch lösen, daß man durch den gegebenen Punct zur gegebenen Geraden eine Parallele legte; die Tracen der durch diese zwey Geraden gelegten Ebene gäben sich, daß man ihre beyden horizontalen Durchgänge und einen vertikalen Durchgang suchte. Die Tracen derselben sind AC und CB. Fig. 13 und 14.

Fig. 13 und 14.

Anmerkung. Soll durch einen gegebenen Punct a,a′ zu einer Ebene ACB eine parallele Ebene gelegt werden, so weiß man, daß die respectiven Tracen beyder Ebenen unter sich parallel seyn werden; man führe daher durch den gegebenen Punct eine Parallele zur horizontalen Trace und suche ihren vertikalen Durchgang; man verlängere sie daher bis an die Projections-Achse in d, errichte in dem so erhaltenen Durchschnittspunct ein Perpendikel gleich der vertikalen Projection des gegebenen Punctes, und führe durch den so erhaltenen Punct d′ eine Parallele zur vertikalen Trace, und durch den Durchschnitt c′ dieser mit der Projections-Achse, eine Parallele zur horizontalen Trace der gegebenen Ebene; wo alsdann die zwey so erhaltenen Tracen C′A′, C′B′ die der gesuchten Ebene Fig. 15 angehören.

Fig. 15.

VII. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct a,a′ auf eine gegebene Ebene ACB ein Perpendikel fällen.

Auflösung. Ist eine Gerade perpendikulär auf eine Ebene, so sind die Projectionen derselben auf die respectiven Tracen perpendikulär. Man fälle daher durch die gegebenen Projectionen des Punctes auf die gegebenen Tracen, Perpendikel, und bestimme die Durchgänge der so gegebenen perpendikulären Linie mit der Ebene. Die angeführte Eigenschaft gründet sich darauf, daß wenn eine Linie auf eine Ebene perpendikulär ist, sie auf alle in der Ebene liegende durch den Begegnungspunct der Geraden mit der Ebene gehende Linien perpendikulär ist; führt man daher durch diesen Begegnungspunct zu den respectiven Tracen Parallele,

die in der Ebene liegen, so werden offenbar die Projectionen des Perpendikels und die in der neuen Lage angenommenen Tracen die erwähnte Eigenschaft haben. Fig. 16. Fig. 16.

VIII. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct a a' auf eine gegebene Gerade cd, c'd' ein Perpendikel fällen.

Auflösung. Man fälle durch den gegebenen Punct auf die gegebene Gerade eine perpendikuläre Ebene, und bestimme dann den Durchgang der gegebenen Geraden mit dieser. Es ist also hierbey das Erste, eine Ebene ACB zu legen, die perpendikulär auf die gegebene Gerade steht, und ihre Tracen bestimmen, und dann diese Ebene parallel zu sich selbst durch den gegebenen Punct führen; wo dann die neue Ebene A'C'B' zum Vorschein kommt. Fig. 17. Fig. 17.

Das bisher Gesagte wird hinlänglich seyn, um in allen Fällen Projectionen auszuführen, die sich auf ebene Oberflächen beziehen; es ist auch die Basis für die nachmahlige Untersuchung der Constructionen bey krummen Oberflächen; und es wird jedem überlassen, diese Sätze noch weiter auszudehnen, welches bey den hier vorhandenen Mitteln nicht schwierig ist. Einige Zusätze, die mit zu erwähnen nöthig sind, sollen später bey ihrer Anwendung vorgenommen werden.

Eine bloße Folgerung wäre z. B. den Winkel bestimmen, den die Tracen einer Ebene unter sich bilden, welches in der Anwendung dann Statt fände, wenn es sich handelte, Hölzer so zu schneiden, damit sie in andere gehörig passen. Um dieses zu bewerkstelligen, dürfte man nur sowohl in der vertikalen als horizontalen Trace einen Punct annehmen, und diese beyden durch eine Gerade verbinden; construirt man sich nun das so entstehende in der gegebenen Ebene liegende Dreyeck, dessen Scheitel in der Projections-Achse

liegt, so ist der der erwähnten letzten Seite gegenüberstehende Winkel der gesuchte Neigungswinkel beyder Tracen. Diese dritte Seite ist immer die Hypothenuse eines Dreyeckes, dessen eine Kathete das Perpendikel von dem auf der vertikalen Trace angenommenen Punct auf die Projections-Achse, und dessen andere Kathete die Entfernung des Fußes dieses Perpendikels von dem in der horizontalen Trace angenommenen Punct ist.

II.

Allgemeine Betrachtungen über die Oberflächen, insbesondere der konischen und cylindrischen, als nachmahliger Begründung der Beleuchtung bey Sonnenlicht und Lampen- oder Mondlicht. Von den Enveloppirungen (Einhüllungen), Tangirungen (Berührungen) und Developpirungen (Ausbreitungen); Durchschnitte von Oberflächen; Constructionen der Schatten; Glanzpuncte, Glanzkanten, Fixpuncte, Fixlinien (welche Gerade oder Curven seyn können); Reduction der Schatten, Behandeln des Schattens; Übersicht des Gesagten; Beyspiele.

Zur Erzeugung einer Oberfläche gehören immer zwey Linien, die Generatrix und die Conductrix; erstere bewegt sich nach irgend einem Gesetze, und letztere gibt die Gränzen an, in der sie sich zu bewegen hat. Dieses ersieht man schon bey der Ebene. Bey genauer Betrachtung der Oberflächen findet man, daß einige durch die Bewegung einer geraden Linie und einer Curve, andere lediglich nur durch die Bewegung einer Curve entstehen können. Die Betrachtung, daß eine und dieselbe Oberfläche auf eine zweyfache Art entstehen könne, wird nachmahlig von der größten Anwendung seyn. Für uns sind die konischen, cylindrischen als eine Folge der ersten, und die Revolu-

tions-Oberflächen die wichtigsten. Man denke sich irgend einen Punct im Raume, und irgend eine Curve; ferner eine der Lage nach veränderliche dieß- und jenseits der Projections-Ebene ins Unendliche gehende Gerade (obschon es Fälle geben kann, in denen dieselbe als begränzt angenommen werden kann, obwohl die Lage in jedem Falle variabel ist, und dieses in so ferne, als man begränzte Oberflächen betrachtet), die sich immer so beweget, daß sie durch den gegebenen Punct, und durch Puncte der gegebenen Curve gehen: so entsteht die konische Oberfläche. Die gegebene Curve ist die Conductrix (Leitlinie), und die bewegliche Gerade die Generatrix (erzeugende Linie). Die Generatrix hat immer für jede ihr zugehörige Oberfläche ein zweyfaches Verhalten, einmahl, nach dem Gesetze der Conductrix sich zu bewegen, und zweytens gegen eine andere ebenfalls gegebene Gerade der Directrix (Lenklinie); dieses muß offenbar seyn, weil jede Gerade durch zwey Puncte ihrer Lage nach bestimmt wird; denn es könnte immerhin der Endpunct der Generatrix durch Puncte der Conductrix gehen, und in jedem dieser Puncte könnte die Generatrix eine verschiedene Lage erhalten, mithin könnte auf diese Art nur eine unstätige Oberfläche entstehen. Diese Oberfläche denkt man sich dieß- und jenseits des Scheitels der konischen Oberfläche bis ins Unendliche verlangert, und die durch die aneinander gereihten Generatrixen ihrer Länge nach gebildete Fläche heißt Umfläche. Nähme man den Scheitel der konischen Oberfläche in unendlicher Entfernung, so würden die Seiten derselben parallel, und man erhielte die cylindrische Oberfläche; eine cylindrische Oberfläche entsteht mithin dadurch, daß eine gegebene Gerade sich, immer zu sich selbst parallel, in einer gegebenen Curve bewegt. Nimmt man hingegen an, daß die Conductrix sich, immer parallel zu sich selbst, gegen einen außerhalb ihrer Ebene befindlichen Punct aufwärts bewegt, daß

aber die auf einander folgenden Lagen ihres Mittelpunctes immer in der nach dem gegebenen Puncte gerichteten Geraden liegen, die Fläche der Conductrix selbst sich entweder ändert oder constant bleibt, so ergibt sich eine andere Entstehungsart der konischen und cylindrischen Oberflächen. Das Gesetz, nach welchem die Änderung der Fläche geschieht, ist ohnedieß bekannt. Von diesen beyden Oberflächen nun, die sowohl durch die Bewegung einer Geraden als einer Curve entstehen können, unterscheiden sich die Revolutions-Oberflächen. Man denke sich eine Curve (Generatrix), die sich um eine fixe Achse drehet, so geht dadurch die Revolutions-Oberfläche hervor. Das Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid gehören zu dieser Gattung. Man nehme nun eine solche durch Rotation entstandene Oberfläche, und lege von einem auf ihr angenommenen Puncte eine auf die Rotations-Achse perpendikuläre Ebene, so wird der Schnitt ein Kreis; daraus folgt, daß auch jede Revolutions- oder Rotations-Oberfläche durch die Bewegung eines der Form als Lage nach veränderlichen Kreises (der hier ebenfalls erzeugende Fläche ist) hervorgeht, dessen Ebene aber immer perpendikulär auf die Rotations-Achse ist, dessen Halbmesser aber von Null nach irgend einem Gesetze entweder bis ins Unendliche zunimmt, oder bis zum größten Abstande eines Punctes der Oberfläche von der Rotations-Achse wächst, und dann nach demselben Gesetze wieder abnimmt (ersteres hätte z. B. beym Paraboloid, letzteres beym Ellipsoid, der Kugel Statt). Diese zweyfache Entstehungsart, sowohl der konischen, cylindrischen als Revolutions-Oberflächen, dient dazu, um die so häufig vorkommenden tangirenden Ebenen an krumme Oberflächen führen zu können *).

---

*) Wird daher eine Oberfläche durch eine Ebene geschnitten, und betrachtet man auf diesen Schnitt einen Punct, und führt durch denselben an die Oberfläche die tangirende Ebene, so gibt der Durchschnitt dieser beyden Ebenen die Tangente.

Man nehme irgend eine Oberfläche und einen beliebigen Punct auf ihr, denke sich ferner durch denselben, vermöge der zweyfachen Entstehungsart der Oberflächen, die Generatrixen, und führe an jede derselben durch den gegebenen Punct eine Tangente; die durch diese beyden Tangenten gelegte Ebene ist die an die Oberfläche am gegebenen Puncte tangirende Ebene; sie hat die Eigenschaft, bey jeder Verlängerung mit der Oberfläche nur ein Element gemein zu haben. Bey genauer Betrachtung der Natur der Oberflächen findet man, daß die an eine Oberfläche tangirende Ebene mit derselben entweder nur einen Punct oder eine Gerade gemeinschaftlich hat. Bey allen Revolutions-Oberflächen findet ersteres, letzteres bey allen konischen und cylindrischen Statt *).

Wir haben gesagt, Revolutions-Oberflächen seyen solche, die dadurch entstehen, daß eine Curve um ihre Achse sich bewege, und nimmt dabey an, daß die Generatrix nicht der Form, sondern nur der Lage nach variabel sey; dieß ist der Grund, daß man cylindrische und konische Oberflächen, die auch durch Rotation eines Rechteckes oder Dreyeckes, welche beyde wohl auch im Allgemeinen von Curven begränzt, deren Krümmungshalbmesser aber unendlich sind, erzeugt werden können, nicht zu den Rotations-Oberflächen rechnet; eine schiefe konische Oberfläche z. B. könnte durch eine nur der Form und Lage nach variable Generatrix erzeugt werden. Es gibt gewisse Gattungen Oberflächen, die auf einer Ebene so ausgebreitet werden können, daß die Ausbreitung keine Brüche und Übereinanderlegungen erhält; diese Oberflächen heißen developpable (ausbreitbare) Ober-

*) Ist die Curve doppelt gekrümmt, gehört sie mithin zweyen Oberflächen an, und soll an dieselbe durch einen auf ihr angenommenen Punct eine Tangente geführt werden, so führe man durch diesen an jede der beyden Oberflächen eine tangirende Ebene, der Durchschnitt beyder ist das Gesuchte.

flächen, und die Ausbreitung selbst Developpement. Zu dieser Gattung gehören die konischen und cylindrischen Oberflächen, die Rotations-Oberflächen sind davon ausgeschlossen. Die konischen, mithin auch die cylindrischen Oberflächen lassen ihre Entstehung auch so erklären: Man denke sich durch den gegebenen Scheitel, und durch einen beliebigen Punct der Conductrix, eine Ebene gelegt, und lasse dieselbe so bewegen, daß sie immer durch den gegebenen Punct und durch Puncte der Conductrix gehe; es ergeben sich mithin durch die Durchschnitte zweyer so auf einander folgenden Ebenen die Generatrixen; nach dieser Entstehungsart begründet sich auch die Theorie der tangirenden Ebenen, und es läßt sich gleich das Kennzeichen derselben einsehen, daß die horizontale Trace derselben an die horizontale Projection der Conductrix tangirend ist. Bewegt sich die tangirende Ebene weiter und nimmt nach und nach die Elemente der Oberfläche auf, so bildet sich in der beweglichen tangirenden Ebene die Ausbreitung der Oberfläche. Für die nachherige Anwendung ist die Kenntniß der Enveloppirungen von der größten Wichtigkeit. Man denke sich wie viel immer Revolutions-Oberflächen und einen Kegel oder Cylinder, oder auch eine Kugel, der dieselben tangirt; die häufigsten Fälle sind für die Anwendung, daß eine Revolutions-Oberfläche durch eine konische oder cylindrische Oberfläche eingehüllt wird; die Berührung beyder Oberflächen geschieht nach einer ebenen Curve, die, wie später gezeigt werden soll, bey Schatten-Constructionen das hauptsächlich zu Berücksichtigende ist.

IX. Aufgabe. An eine cylindrische Oberfläche, welche durch die Projectionen ihrer Generatrix ab, a′b′ und Conductrix ABCD gegeben ist, durch einen außerhalb der Oberfläche gegebenen Punct c, c′ eine tangirende Ebene führen.

Auflösung. Der gegebene Punct mag auf oder außerhalb der cylindrischen Oberfläche liegen, so bleibt die constructive Ausführung dieselbe. Man lege durch den gegebenen Punct eine Parallele zur Generatrix des Cylinders, und führe durch den horizontalen Durchgang derselben eine Tangente zur Conductrix; dieß ist die horizontale Trace der gesuchten tangirenden Ebene; man verlängere sie bis zum Durchschnitte mit der Projections-Achse, und suche entweder den vertikalen Durchgang der erst erwähnten Parallelen, oder der durch den gegebenen (oder einen beliebigen Punct dieser Parallelen) Punct zur horizontalen Trace gelegten parallelen Geraden, je nachdem es die Umstände erfordern; fiele der vertikale Durchgang der ersten Parallelen außerhalb des Zeichnungsblattes, so würde man sich der anderen Parallelen bedienen; übrigens dienen beyde Methoden zur gegenseitigen Controlle. Verbindet man den erwähnten vertikalen Durchgang mit dem Durchschnitte der horizontalen Trace in der Projections-Achse, so ergibt sich die vertikale Trace der an den Cylinder durch den gegebenen Punct gehenden tangirenden Ebene. Der Cylinder wird aber, wenn sich der gegebene Punct außerhalb der cylindrischen Oberfläche befindet, durch zwey durch diesen Punct gehende Ebenen berührt werden können. Es werden die Tracen der zweyten tangirenden Ebene gefunden, wenn man durch den oben erwähnten horizontalen Durchgang an die Conductrix des Cylinders eine zweyte Tangente führt,
Fig. 18. und nach früheren verfährt. Fig. 18. Wäre der gegebene Punct auf der cylindrischen Oberfläche selbst, so lege man durch ihn die Seite des Cylinders, führe durch ihren Begegnungspunct mit der Conductrix eine Tangente an dieselbe, so ist sie die horizontale Trace der tangirenden Ebene; der Durchschnitt jener mit der Projections-Achse, mit dem Durchgangspuncte der Seite des Cylinders und der Vertikal-Ebene durch eine Gerade verbunden, gibt die vertikale

Trace. Fig. 19. Ergäbe sich der Fall, daß die cylindrische Oberfläche über der Horizontal-Ebene wäre, so dürfte nur der Durchschnitt der cylindrischen Oberfläche mit der horizontalen Projections-Ebene gesucht, und nach früherem verfahren werden. Fig. 19.

X. Aufgabe. An eine cylindrische Oberfläche, deren Conductrix ABCD und deren Generatrix ab, a b′ ist, zu einer gegebenen Geraden cd, c′d′ eine parallele tangirende Ebene führen.

Auflösung. Man lege durch einen gegebenen oder willkürlichen Punct der Geraden eine Parallele zur Generatrix des Cylinders, und bestimme die Tracen der durch diese beyden Geraden gelegten Ebene. Die tangirende Ebene wird nun parallel zu der so gefundenen, und ihre horizontale Trace tangirend an die horizontale Projection der Conductrix seyn. Man führe daher zu der gefundenen horizontalen Trace eine Parallele, welche die Conductrix tangirt, verlängere sie bis in den Durchschnitt mit der Projections-Achse, und führe durch denselben mit der schon gefundenen vertikalen Trace eine Parallele. Fig. 20. Fig. 20.

XI. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct a, a′ an eine konische Oberfläche, deren Basis ABCD und Scheitel c, c′ ist, eine tangirende Ebene führen; derselbe mag auf oder außer der Oberfläche sich befinden.

Auflösung. Ist der gegebene Punct auf der Oberfläche, so denke man sich durch denselben eine Seite der konischen Oberfläche (die durch diesen Punct gehende Generatrix), und führe durch den Durchschnitt dieser Seite und der Conductrix eine Tangente an letztere; legt man nun durch den gegebenen Punct oder durch einen beliebigen auf

dieser Seite liegenden eine Parallele zur horizontalen Trace, welche obige Tangente ist, so bestimmt ihr Durchgang mit der vertikalen Projections-Ebene einen zweyten Punct der vertikalen Trace der gesuchten tangirenden Ebene; verbindet man ihn mit dem Durchschnitt ihrer horizontalen Trace und der Projections-Achse, so ergibt sich auch die gesuchte vertikale Trace. — Ist der gegebene Punct außerhalb der konischen Oberfläche, so sind wieder zwey tangirende Ebenen möglich. Dafür verbinde man den Scheitel und den gegebenen Punct durch eine Gerade, und suche deren Durchgang mit der horizontalen und vertikalen Projections-Ebene; durch den horizontalen Durchgangspunct führe man an die horizontale Projection der Conductrix eine Tangente; so ergibt sich die horizontale Trace der tangirenden Ebene, woraus sich deren vertikale Trace, und beyde der anderen tangirenden Ebene bestimmen lassen. Fig. 21.

Fig. 21.

XII. Aufgabe. An eine konische Oberfläche, deren Scheitel a, a′ und Conductrix ABCD durch ihre respectiven Projectionen gegeben sind, eine tangirende Ebene parallel zu einer durch ihre Projectionen gegebenen Geraden cd, c′d′ führen.

Auflösung. Man lege durch den Scheitel der konischen Oberfläche eine zur gegebenen Geraden parallele Gerade, und suche deren Durchgänge in den beyden Projections-Ebenen; man führe durch den horizontalen Durchgang an die Conductrix die Tangente, so findet man die horizontale Trace der tangirenden Ebene; wird der vertikale Durchgangspunct mit dem Durchschnitt der horizontalen Trace und der Projections-Achse durch eine Gerade verbunden, so ergibt sich die vertikale Trace. Auch hier sind wieder zwey tangirende Ebenen möglich. Fig. 22.

Fig. 22.

XIII. Aufgabe. Die Projectionen einer schief stehenden Rotations-Achse ab, c′b′ eines Ellipsoides, sammt der Generatrix in ihrer Ebene, sind gegeben, man soll durch einen auf derselben durch seine Projectionen gegebenen Punct c, c′ an dasselbe eine tangirende Ebene führen.

Auflösung. Man denke sich für einen Augenblick die tangirende Ebene an den gegebenen Punct, und führe durch denselben und die Rotations-Achse eine Ebene, so enthält der Schnitt die Generatrix, und jede so gelegte Ebene heißt Mittelebene. Man denke sich nun die Mittelebene um ihre horizontale Trace so bewegt, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfällt, und verzeichne sich in dieser Lage die Generatrix. Die Verzeichnung kann in jedem Falle, bey jeder Lage der Rotations-Achse gegen die horizontalen Projections-Ebenen dadurch sehr leicht geschehen, daß man die Lage des gegebenen Punctes und die der Rotations-Achse in der ungelegten Mittelebene sucht, und durch Coordinaten, die sich aus den Projectionen der Generatrix ergeben, letztere construirt. Es ist auch nur nöthig, sich einen Quadranten der Generatrix zu construiren, da sich dann leicht die Ellipse verzeichnen läßt. An die umgelegte Generatrix führe man durch den auf ihr gegebenen Punct eine Tangente, und construire die Projectionen derselben in ihrer primitiven Lage, oder in der Lage, die sie eigentlich einnehmen muß. Eben so lege man durch den gegebenen Punct perpendikulär auf die Rotations-Achse eine Ebene, und lasse dieselbe um ihre horizontale Trace bewegen, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfällt, und führe an den so erhaltenen Kreis durch den gegebenen Punct eine Tangente, und construire sich diese in ihrer primitiven Lage; die durch diese zwey Tangenten gelegte Ebene ist die tangirende Ebene. Man hätte auch durch den gegebenen in der umgelegten Ge-

neratrix die Normale bestimmen, diese dann in ihrer wahren Lage darstellen, und durch ihren Endpunct auf sie eine perpendikuläre Ebene führen können, welch letztere ebenfalls
Fig 23. die tangirende Ebene gewesen wäre. Fig. 23.

Die Construction vereinfacht sich sehr, wenn die Rotations-Achse perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene steht, und der gegebene Punct gerade auf der gegebenen Generatrix, letztere in einer solchen Lage, daß sie parallel zur vertikalen Projections-Ebene ist, sich befindet;
Fig. 24. Fig. 24, allwo a, a′ der gegebene Punct, und die Curven ABCD und A′B′C′D′ die Projectionen der Generatrix sind.

Wenn sich Oberflächen durchdringen, so bilden sie einen Durchschnitt, der im Allgemeinen eine Linie von doppelter Krümmung ist. Bey dem Auffinden dieser Durchschnitte kommt die Betrachtung der Oberflächen, ob sie durch gerade Linien oder durch Curven ihr Entstehen haben, sehr wohl zu Statten, da sich durch diese Berücksichtigung die Construction sehr vereinfacht. Wenn cylindrische Oberflächen sich durchdringen, so schneiden sich immer Seiten beyder Cylinder, und es kommt nur darauf an, zu irgend einer angenommenen Seite des einen Cylinders die entsprechende des anderen, welche sich mit ersterer schneidet, zu finden. Hierzu hat man immer folgendes Mittel: Man lege durch einen beliebigen Punct der zuerst angenommenen Seite eine Parallele zur Generatrix des zweyten Cylinders, und durch diese beyden Geraden eine Ebene, die Durchschnitte der horizontalen Projection der Conductrix des zweyten Cylinders mit der horizontalen Trace der genannten Ebene geben die Puncte an, durch welche die Generatrix des zweyten Cylinders geführt werden muß, um die im ersten Cylinder an-
Fig. 25. genommene Seite oder Generatrix zu schneiden. Fig. 25. ABCD und A′B′C′D′ die Conductrixen, und ab′a′b′ und cd, c′d′ die Projectionen der Generatrixen beyder Cylinder.

Würden sich ein Paar Kegel durchdringen, so schneiden sich ebenfalls gerade Linien, oder mit anderen Worten die Durchschnitts-Curve geht durch die Durchschneidung gerader Linien, nähmlich durch die der Seiten beyder Kegel hervor. Wollte man nun wissen, welche die Seite des zweyten Kegels wäre, die mit einer angenommenen des ersten Kegels sich schnitte, so dürfte man nur beyde Scheitel durch eine Gerade verbinden, und successive durch diese und die angenommene Seite des ersten Kegels Ebenen legen; die Durchschnitte der horizontalen Tracen dieser Ebenen mit der horizontalen Projection der Conductrix des zweyten Kegels gäben diejenigen Puncte an, durch welche die Seiten des zweyten Kegels geführt, sie mit der im ersten Kegel angenommenen, zusammentreffen würden. Hier kann sich wohl der Fall ergeben, daß, wenn die die Scheitel beyder Kegel verbindende Gerade sich dem Parallelseyn mit der horizontalen Ebene nähert, die horizontale Trace der durch diese Gerade und eine angenommene Seite des einen Kegels gelegte Ebene, nicht bestimmt werden könnte, weil nähmlich der Durchgangspunct der ersten Geraden mit der Horizontal-Ebene zu weit fiele; in diesem Falle müßte man durch beyde erwähnte Gerade eine dritte Gerade legen, und die Tracen der durch diese und die zweyte Gerade gelegten Ebene, die mit ersterer eine und dieselbe ist, bestimmt werden; und bey diesem Verfahren hat man es immer in seiner Gewalt, wie groß die Entfernung der Durchgangspuncte dieser zwey Geraden mit der Horizontal-Ebene seyn soll; je weiter diese genommen, desto genauer bestimmt sich die Trace. Fig. 26, allwo ABCD und A′B′C′D′ die Conductrixen beyder Kegel, und a, a′ und b, b′ die Projectionen der Scheitel beyder Kegel sind. Fig. 26.

Würden sich Revolutions-Oberflächen durchdringen, so dürften nur jedesmahl die Durchschnitte der beyden Generatrixen aufgesucht werden; eben so für das Durchdringen

konischer und cylindrischer Oberflächen mit Revolutions-Oberflächen. Die Folge wird noch deutlicher zeigen, welcher Mittel man sich bedient, diese Durchdringungen darzustellen.

Zur deutlichen Darstellung eines Gegenstandes gehört auch die seinen Theilen zugehörige Beleuchtung. Dieselbe ist zweyerley; entweder fallen die in gerader Linie sich fortpflanzenden Strahlen alle unter sich parallel auf den Körper, und dieß ist Beleuchtung beym Sonnenlicht, indem die aus der Sonne kommenden Strahlen, wegen der großen Entfernung derselben von der Erde, als parallel angesehen werden können, oder die Strahlen gehen alle aus einem in endlicher Entfernung vom Gegenstande liegenden Puncte, Beleuchtung beym Mond- oder Lampenlicht.

Man übersieht wieder, daß die Beleuchtung beym Lampenlicht das Allgemeine, hingegen die beym Sonnenlicht nur ein besonderer Fall davon ist. Für die Beleuchtung beym Sonnenlicht müssen die Projectionen des Strahles, für Lampenlicht hingegen die des leuchtenden Gegenstandes gegeben seyn. Von der horizontalen Projection des Lichtes ist nur die Lage, von deren vertikalen Projection aber die Größe des vom Lichte entblößten Theiles oder Schattens abhängig. Wenn irgend ein durch seine Projectionen gegebener Gegenstand beleuchtet wird, so ersieht man auch, daß nicht alle Gränzen des Gegenstandes Schatten werfen können, oder mit anderen Worten, es müßte das Licht durch den Körper gehen, wenn alle Begränzungen Schatten absetzen sollten. Von der Seite, von welcher das Licht einfällt, sind die schattenwerfenden Gränzen abhängig. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmäßig, sich den Schatten auch von solchen Gränzen des Objectes zu construiren, die unter den gegebenen Projectionen des Lichtes zwar nicht Schatten werfen können; davon ist einer der, wenn der Schatten durch eine der Horizontal-Ebene vorhergehende

Oberfläche aufgefangen wird, wie später bey der Reduction der Schatten gezeigt werden soll.

Man denke sich nun einen durch die Lichtstrahlen gebildeten Cylinder oder Kegel, je nachdem die Beleuchtung durch Sonnen- oder Lampenlicht geschieht, deren Basis die schattenwerfende Contur, und deren Seiten die Lichtstrahlen sind. Der Durchschnitt dieses Cylinders oder Kegels mit der den Schatten auffangenden Oberfläche ist der gesuchte Schatten. Bey den Rotations-Oberflächen enveloppirt ein Cylinder oder Kegel die gegebene Oberfläche; alle Strahlen sind mithin an dieselbe tangirend; die einzelnen Tangirungspuncte verbunden, stellen die so genannte Beleuchtungs-Contur, deren Tracen immer bestimmt werden müssen, um ihren Schatten zu finden, vor; überhaupt ist zu bemerken, daß man bey allen Schatten-Constructionen nur die schattenwerfende Contur sich ausmitteln darf. An den Tangirungspuncten der Strahlen mit der Oberfläche ist die Gränze des beleuchteten Theiles von dem dunklen Theile der Oberfläche, und diese Gränze, da sie sich immer scharf präsentirt, heißt Kernschatten; diese die Oberfläche tangirenden Strahlen setzen sich aber weiter ab, und der Schatten, der auf der Oberfläche, auf welche die Strahlen treffen, gebildet wird, heißt Schlagschatten; der Unterschied zwischen Kern- und Schlagschatten ist daher der, daß ersterer durch die Tangirung, letzterer aber durch das wirkliche Absetzen des Lichtes auf eine Oberfläche hervorgeht; bey krummen Oberflächen wird der Kernschatten auch Rundungsschatten genannt. Die scharfe Begränzung des Kernschattens hat, wie schon erwähnt wurde, bey jeder Oberfläche Statt, also auch bey durch Ebenen begränzten Gegenständen; denn wie man leicht übersehen kann, liegen die die Oberfläche berührenden Strahlen in einer und derselben an dieselbe tangirenden Ebene, oder in verschiedenen, ersteres bey cylindrischen und konischen, letzteres bey Revo-

lutions-Oberflächen; bey einem durch ebene Flächen begränzten Körper geschieht die Tangirung im Durchschnitte zweyer solcher Ebenen, und derselbe ist als die Berührungskante der zum Lichte parallelen tangirenden Ebene mit dem Körper anzusehen. — Sowohl bey den beleuchteten als dunklen Theilen eines Gegenstandes bemerkt man eine Gradation, und es kommt hauptsächlich darauf an, nebst der gehörigen Intensität des Kern- und Schlagschattens noch die Intensitäten der Übergänge aus Licht in Schatten und umgekehrt, oder die der Halbschatten auszudrücken. Jene Lichtstrahlen, die auf irgend eine Oberfläche perpendikulär stehen, erleiden keine Zerlegung, mithin auch keine Verminderung ihrer Intensität, wohl aber alle anderen; mithin müssen an jenen Stellen, wo dieses geschieht, die höchsten Licht-Partien seyn. Die Puncte anf der Oberfläche, die das höchste Licht haben, heißen Glanzpuncte, und denkt man sich an denselben die tangirende Ebene, so liegen sie offenbar in der Richtung der an diesen Puncten auf die Oberfläche geführten Normalen. Glanzpuncte haben nur dort Statt, wo die ganze Beleuchtungs-Curve in verschiedenen tangirenden Ebenen liegt, mithin bey allen Rotations-Oberflächen. Die konischen und cylindrischen Oberflächen werden aber von einer tangirenden Ebene nach einer Kante berührt, und diejenige, welche von allen auf diese Oberflächen perpendikulären Lichtstrahlen getroffen wird, heißt Glanzkante; es hat mithin nur bey jenen Oberflächen eine Glanzkante Statt, bey denen die Beleuchtungs-Curve in einer und derselben tangirenden Ebene liegt. Für die richtige Construction ist es sehr zweckmäßig, wenn sich der Fall ergibt, daß der Schatten der Beleuchtungs-Contur von mehreren Oberflächen aufgefangen wird, die Gränzen der schattenwerfenden Contur ausmitteln zu können, von welchen aus der Schatten von einer Oberfläche auf eine andere übergeht. Diese Gränzen, welche entweder Puncte, oder gerade,

oder krumme Linien seyn können, heißen Fixpuncte, Fixlinien. Zu ihrer Ausmittelung bedient man sich entweder der Ebene, der cylindrischen oder konischen Oberflächen, welche durch den Durchschnitt der beyden den Schatten auffangenden Oberflächen parallel zum Lichte gelegt werden, und der Durchschnitt der erwähnten Oberflächen mit der schattenwerfenden Contur gibt die Gränzen an, über welche Lichtstrahlen geführt, selbe gerade in den Übergang von einer den Schatten auffangenden Oberfläche, auf die andere treffen. Die so auf der Beleuchtungs-Contur erhaltenen Gränzen geben auf derselben nun an, welche Theile derselben auf die eine und andere der den Schatten auffangenden Oberflächen, Schatten werfen.

Eine ähnliche Ausmittelung fände auch Statt, wenn der von irgend einem Objecte geworfene Schatten von mehreren Oberflächen aufgefangen würde. Es können, wenn ein Theil eines Hauptschattens von einer anderen Oberfläche aufgefangen wird, als die übrigen Theile desselben, in Ansehung des ersten Theiles dreyerley Untersuchungen angestellt werden; entweder die Projection des von der ersten Oberfläche aufgefangenen Schattens, oder die Projection desselben, wenn diese erste Oberfläche nicht vorhanden wäre, sondern der Schatten auf die horizontale Projections-Ebene fiele, und endlich die Form und Größe des aufgefangenen Schattens auf der ersten denselben enthaltenden Oberfläche.

Aus dem bisher Gezeigten übersieht man nun leicht, daß die Schatten-Construction lediglich auf der Lehre von der Durchdringung der Oberflächen beruht, und die Beleuchtung mag bey Sonnen- oder Lampenlicht geschehen, so bedarf man nur folgender Aufgaben, die alle Fälle enthalten, es möge auf ebene oder krumme Oberflächen Schatten fallen:

a) »Durchdringung eines Kegels oder Cylinders durch »eine Ebene.«

b) »Durchdringung von Cylindern oder Kegeln, oder Cy»lindern und Kegeln.«

c) »Durchdringung von Revolutions-Oberflächen mit Cy»lindern oder Kegeln, oder umgekehrt.«

d) »Durchdringung von Revolutions-Oberflächen und »Ebenen.«

So oft sich der Fall ergibt, daß der Schatten eines Gegenstandes in den eines andern tritt, folgt, daß ersterer aufgefangen wird, und die Reduction läßt sich theils nach den schon gegebenen, und den noch zu gebenden Regeln leicht bewerkstelligen. Wenn man sich bey cylindrischen und konischen Oberflächen die Beleuchtungskanten ausgemittelt hat, die immer in der an die Oberfläche tangirenden, zum Lichte parallelen Ebene liegen, so ergibt sich deren Schatten sehr leicht, indem er die horizontale Trace der tangirenden Ebene ist, wenn er auf die horizontale Projections-Ebene fällt; auch wird letzterer bey cylindrischen Oberflächen dadurch sehr bequem gefunden, daß man den Schatten der beyden, die cylindrische Oberfläche begränzenden Conductrixen sucht, und an die so erhaltenen Schatten-Conturen Tangenten führt, welche die Schatten der Beleuchtungskanten seyn werden; auch unterliegt es sodann keinen Schwierigkeiten, aus den Schatten der Beleuchtungskanten auf die Projectionen derselben zu schließen. Gewisse Umstände lassen oft einfachere Constructionen zu, als es sonst bey der allgemeinen Untersuchung Statt findet; so, wenn die Conductrixen Kreise sind, deren Ebenen parallel mit der horizontalen Projections-Ebene sind; in diesem Falle ist auch die Schatten-Contur der Conductrix ein Kreis, dessen Mittelpunct aus den Projectionen des Lichtes leicht dadurch gefunden wird, daß man den horizontalen Durchgang des durch den Mittelpunct der Conductrix gelegten Strahles sucht, und dessen Halbmesser dem der Conductrix gleich ist. Wenn ein Paar Cylinder auf einander Schatten werfen, so findet man sehr leicht den

von dem einen Cylinder aufgefangenen, daß man die Schatten beyder Cylinder construirt; es wird aber der Schatten des einen in den des andern fallen, und der diesen beyden Schatten-Conturen gemeinschaftliche Antheil wurde von dem einen Cylinder aufgefangen, und die Aufgabe ist auf die zurückgeführt: Den Durchschnitt zweyer Cylinder finden; es darf nur zu einer angenommenen Seite des Licht-Cylinders, das ist jener, dessen Seiten oder Generatrixen die Lichtstrahlen sind, die zugehörige Seite des andern Cylinders gefunden werden, welche mit ersterer zusammentrifft. Man suche den Durchgang des angenommenen Strahles mit der allgemeinen Oberfläche der horizontalen Projections-Ebene, und denke sich durch denselben eine Parallele zum Schatten der Glanz- oder Beleuchtungskante; so muß offenbar diese Parallele der Schatten von zwey Seiten des Cylinders seyn; diese beyden Seiten in der vertikalen Projection dargestellt, und ihren Durchschnitt mit dem angenommenen Strahl gesucht, geben zwey Puncte des von dem einen Cylinder aufgefangenen Schattens; beyde Durchschnitte gehören aber nie für den Schatten, außer man würde sich den Strahl durch den Cylinder gehend vorstellen, sondern sie gehören zur Durchschnitts-Curve des Licht-Cylinders und anderen, und nur der oberste Durchschnittspunct gehört zur Schatten-Curve auf den Cylinder. Für den Fall, daß ein Kreis auf einen Cylinder Schatten wirft, gilt dieselbe Construction. Sehr zweckmäßig ist es, die Begränzungspuncte des Schattens, oder die Puncte zu construiren, von denen aus der Schatten auf eine andere Oberfläche übergeht.

Man könnte leicht in Versuchung gerathen, daß sich die Tangirungskanten dadurch ergeben, daß man in der vertikalen Projection der Basis des Cylinders eine Tangente führt (in der Voraussetzung, der Cylinder sey schief gegen die vertikale Projections-Ebene), parallel zum reducirten Licht, und durch den Berührungspunct nun eine Seite des

Cylinders zieht, so daß diese die Beleuchtungskante wäre. Hier bemerke man aber, daß die Tangente immer in der Ebene der Curve liegen muß, und obiges Verfahren dann nur anwendbar ist, wenn das Licht mit der Ebene der Conductrix parallel wäre. Man hat daher immer auch das Mittel, um die Beleuchtungskanten zu finden, daß man den Cylinder durch eine zum Lichte parallele Ebene schneidet, und an den so erhaltenen Schnitt parallel zum projicirten Lichte Tangenten führt; die durch die so erhaltenen Berührungspuncte gelegten Seiten des Cylinders sind die Beleuchtungskanten. Die allgemeinste Ausmittelung der Beleuchtungskanten bleibt aber immer die, daß man parallel zum Lichte tangirende Ebenen führt. Ein ähnliches Verfahren hat für die Beleuchtung beym Lampenlicht Statt.

Wir gehen nun zu einer Hauptsache, nähmlich dem Schattiren der Oberflächen, über. Hierbey kommt es nicht nur allein auf das Wissen der Theorie an, sondern es müssen so viele andere Nebenumstände mit in Betrachtung gezogen werden, um sich der Wahrheit des darzustellenden Gegenstandes zu nähern. Hauptsächlich ist dieses das zweckmäßige Ineinanderwirken der Übergänge aus Licht in Dunkel, und umgekehrt, mit allen dahin gehörigen Gradationen; dieses ist die sogenannte Haltung in einer Zeichnung, und setzt zum Gelingen der Arbeit auch sehr viele mechanische Fertigkeit voraus.

Da wir bey der ortogonalen Projection das Auge in jedem von dem Gegenstande auf die Projections-Ebene gefällten Perpendikel denken, so übersieht man leicht, daß verschiedene Gegenstandspuncte bald mehr bald minder von den Projections-Ebenen abstehen; diese veränderliche Entfernung bewirkt nun eine Modificirung der Intensitäten der sowohl im Lichte als im Schatten stehenden Objecte. Die im Lichte stehenden Gegenstände werden so schattirt, daß die näheren heller, die entfernteren dunkler werden, und dieses

rührt daher, da, je weiter der Gegenstand steht, desto mehr Luftschichten stellen sich zwischen ihm und dem Auge, mithin desto weniger beleuchtet kann er erscheinen. Für Gegenstände, die im Dunklen sind, gilt hingegen, daß jene stärker gehalten werden müssen, die näher sind, und die schwächer, die entfernter erscheinen; und zwar aus demselben eben schon angeführten Grunde. Bey krummen Oberflächen ist die Beleuchtungs-Contur im stärksten Schatten; und der Übergang bis zum höchsten Lichte oder bis an die Stelle, wo das Licht perpendikulär auf die Oberfläche fällt, geschieht allmählich. Solche Glanzpuncte und Glanzkanten haben aber nicht nur allein bey krummen Oberflächen Statt, sondern überhaupt im Durchschnitt zweyer Begränzungs-Ebenen eines Gegenstandes; dieser dem Lichte ausgesetzte Durchschnitt erhält seiner ganzen Länge hin einen Lichtstreifen, denn dieser Durchschnitt ist dem Auge am nächsten, mithin besitzt er auch das höchste Licht. Stehen krumme Oberflächen im Schatten, so kommt derjenige Theil von ihr, der an einer ebenfalls im Dunklen stehenden Oberfläche liegt, in größere Dunkelheit; oder mit andern Worten: es hat eine der im Lichte angebrachten Schattirung entgegengesetzte Statt.

Bey den Constructionen sind die Ellipsen von der größten Wichtigkeit. Wenn von irgend einer Oberfläche der Schatten elliptisch ist, oder wenn durch eine Durchdringung von Oberflächen deren Durchschnitt eine Ellipse ist, so ist es immer sehr zweckmäßig, die beyden Extremitäts-Puncte derselben zu finden; oder mit andern Worten, die entsprechenden conjungirten Diameter auszumitteln. Es kommt nur immer darauf an, auszumitteln, welches sich durch die gegebenen Projectionen immer sehr leicht bewerkstelligen läßt, welche Generatrixen es sind, die sich am weitesten auf irgend einer Oberfläche schneiden, oder dieselbe treffen, es sind dieses aber immer die höchsten Puncte, über welche die Generatrixen geführt werden müssen; die andern beyden Extre-

mitäten ergeben sich sehr leicht durch die Führung von Tangenten an die horizontalen Projectionen der gegebenen Curven, deren Lage von den Umständen abhängt; bey Oberflächen hilft man sich durch die Anwendung der tangirenden Ebenen.

Vermöge dem, daß nur eine bestimmte Lage der Linie macht, daß sich deren Projectionen in derselben Größe wie die Linie selbst darstellen, folgt, daß die Projectionen der Achsen einer Ellipse nicht auch als Achsen der Projectionen, sondern lediglich nur als conjungirte Diameter erscheinen werden. Die Theorie der Kegelschnitte wird Gelegenheit darbiethen, das Gesagte besser zu übersehen.

XIV. Aufgabe. Es seyen die Projectionen eines schief stehenden Prisma D, D′ und die Tracen einer Ebene ACB gegeben, man soll bey Sonnen- und Lampenlicht, wo für beyde Fälle die Projectionen des Lichtes ab, a′b′ und a, a′ gegeben sind, den Schatten des Prisma construiren, wenn die schiefe Ebene nicht vorhanden wäre, dann wenn die schiefe mit angenommen wird, und endlich die wahre Größe des Schattens, nachdem die den Schatten auffangende schiefe Ebene sich um ihre horizontale Trace bewegt hat, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist; mit voraus gegangener Untersuchung, ob unter diesen Umständen, das heißt, bey der gegebenen Lage des Lichtes und der anderen Gegenstände, auf die schiefe Ebene Schatten fallen kann, und wenn dieses Statt findet, die Puncte auf der Beleuchtungs-Contur ausmitteln, die ihren Schatten im Durchschnitte der horizontalen Projections-Ebene und der gegebenen Ebene absetzen.

Auflösung. Man mittle sich die Beleuchtungskanten aus, und führe an denselben Lichtstrahlen, und suche deren Durchgänge mit der Horizontal-Ebene. Hierbey ist zu be-

merken, daß jene Kanten, die parallel zur Horizontal-Ebene sind, auch ihren Schatten mit ihnen parallel haben, und man nur nöthig hat über die Endpuncte der Beleuchtungskanten Lichtstrahlen zu führen. Um die Fixpuncte auf der Beleuchtungs-Contur zu finden, die ihren Schatten in dem Durchschnitte der horizontalen Projections-Ebene und der gegebenen schiefen Ebene absetzen, lege man durch diesen Durchschnitt eine Ebene parallel zum Lichte, mittle sich deren Tracen aus, und suche die Durchgänge der Beleuchtungskanten mit derselben. In vielen Fällen, wie z. B. in den hier angenommenen, ist es nicht nothwendig, die erwähnte Ebene, um die Fixpuncte zu erhalten, zu legen, denn dieselben ergeben sich leicht aus den Durchschnitten des Schattens der geradlinigen Kanten mit der horizontalen Trace der gegebenen schiefen Ebene; wäre aber die den Schatten auffangende Ebene in der Luft schwebend und begränzt, so müßte das allgemeine Verfahren angewendet, und durch die unterste Gränze der gegebenen Ebene eine zum Lichte parallele Ebene gelegt werden; wäre es nothwendig, die Kanten der Beleuchtungs-Contur zu verlängern, damit ein Durchgang mit der zum Lichte parallelen Ebene erfolgte, so wirft die angenommene Kante keinen Schatten auf die gegebene Ebene. Sind die Fixpuncte gehörig ausgemittelt, so erhält man auf der Beleuchtungs-Contur jene Theile, die theils auf die Horizontal-Ebene, theils auf die schiefe Ebene Schatten werfen. Man mittle sich nun die Schatten vermöge der Lehre der Durchgänge sowohl den auf die Horizontal-Ebene, als den auf die schiefe Ebene fallenden in ihren Projectionen aus. Ist der auf die schiefe Ebene gefallene Schatten durch seine Projectionen bestimmt, und man nimmt an, daß die schiefe Ebene mit dem auf ihr befindlichen Schatten sich um die horizontale Trace bewegt, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist, so erhält man den auf die schiefe Ebene gefallenen Schatten in seiner wahren

Größe. Um die wahre Größe des von der schiefen Ebene aufgefangenen Schattens zu erhalten, fälle man von den Gränzpuncten desselben auf die Horizontal-Ebene die Perpendikel; und durch deren Fußpuncte ebenfalls Perpendikel auf die horizontale Trace der schiefen Ebene; verbindet man die Durchschnitte dieser letzteren Perpendikel mit der horizontalen Trace mit den zugehörigen Schattenpuncten auf der schiefen Ebene durch Gerade, so sind diese, Hypothenusen von rechtwinkeligen Dreyecken, deren beyde Katheten gegeben sind; und da jeder Punct des Schattens sich bey der wirklichen Bewegung der Ebene in der durch das erwähnte zugehörige rechtwinkelige Dreyeck gelegten Ebene befindet, so dürfen bloß die wahren Längen dieser Hypothenusen gesucht und auf die durch die horizontalen Projectionen der Schattenpuncte auf der schiefen Ebene, auf die horizontale Trace gefällten auch verlängerten Perpendikel getragen
Fig. 27. werden. Fig. 27.

Sollte die Beleuchtung beym Lampenlicht geschehen, so dürfte nur durch den leuchtenden Punct a, a′ und die horizontale Trace der gegebenen Ebene ACB eine Ebene gelegt werden. In Ansehung des Schattirens ist sich nach den vorhergehenden Regeln zu halten, nur kommt noch zu bemerken, daß überhaupt alle Schlagschatten gegen ihre Gränzen zu lichter gehalten werden müssen, als in ihrer Mitte, weil die größere Intensität des Schattens der Gränze durch
Fig. 28. das nebenbey kommende Licht gedämpft wird. Fig. 28.

XV. Aufgabe. Es seyen die Tracen einer Ebene ACB gegeben, und in derselben sey ein Kreis, dessen Lage durch seine mit der Horizontal-Ebene zusammengefallenen Ebene bekannt ist, nebst den Projectionen des Lichtes ab, a′b′ und a, a′ sowohl für Sonnen- als Lampen-Beleuchtung ebenfalls gegeben; ferner kennt man die Tracen einer anderen Ebene A′C′B′; es soll ausgemittelt werden,

ob vom Kreise unter diesen Umständen auf die schiefe Ebene Schatten fallen könne oder nicht, und wenn ersteres Statt findet, sollen auf dem Kreise jene Puncte angegeben werden, die ihren Schatten in dem Durchschnitte der gegebenen Ebene und der Horizontal-Ebene absetzen, wodurch sich alsdann die Gränzen auf den Kreis von jenen Theilen desselben bestimmen, die auf die schiefe Ebene, und von jenen, die auf die Horizontal-Ebene Schatten werfen. Es soll ferner der Schatten construirt werden, wenn die schiefe Ebene nicht vorhanden ist, endlich die wahre Größe des von der schiefen Ebene aufgefangenen, nachdem letztere mit ihren Schatten sich um ihre horizontale Trace bewegte, bis sie mit der Horizontal-Ebene zusammenfiel.

Auflösung. Es kommt darauf an, alle von der Peripherie des gegebenen Kreises auf die horizontale Trace der Ebene des Kreises gefällten Perpendikel als Hypothenusen von rechtwinkeligen Dreyecken darzustellen, deren eine Kathete das Perpendikel von einem Peripherie-Puncte des Kreises auf die Horizontal-Ebene, und deren andere Kathete das Perpendikel ist, welches von dem Begegnungspuncte des ersteren mit der Horizontal-Ebene auf die horizontale Trace der Ebene des Kreises gefällt wurde; oder mit anderen Worten: es handelt sich, die beyden Projectionen des gegebenen Kreises zu finden; der durch die erwähnte Hypothenuse und letztere Kathete gebildete Winkel ist der Neigungswinkel der gegebenen Ebene mit der horizontalen Projections-Ebene; und da von diesen Winkel die Projection des gegebenen Kreises abhängt, muß vorerst aus den gegebenen Tracen der Neigungswinkel bestimmt werden. Den gefundenen wahren Neigungswinkel führe man so, daß sein Scheitel in den Ursprung der Tracen komme, das ist, in den Durchschnitt derselben, und lege durch denselben eine

Perpendikuläre auf die horizontale Trace, welches beydes, wie die Folge zeigen wird, der kürzeren Arbeit wegen geschieht. Man fälle nun in der umgelegten Ebene auf die horizontale Trace derselben einen perpendikulären Durchmesser, und führe dieß- und jenseits des Kreises zu jenen parallele Tangenten, und in gleichen Abständen, der Kürze wegen, vom Durchmesser aus ebenfalls parallele Sehnen, und es handelt sich nun die Größen der von den verschiedenen in diesen Sehnen enthaltenen Peripherie-Puncten auf die horizontale Trace gefällten Perpendikel als Hypothenusen darzustellen. Man ziehe nun durch die Endpuncte der einer Seits des Durchmessers angenommenen Perpendikel, Parallele zur horizontalen Trace, bis in den Durchschnitt mit den durch den Ursprung der Tracen auf die horizontale Trace gelegten dieß- und jenseits dieses Ursprunges unbegränzten Perpendikel. Trägt man nun die Entfernungen dieser Durchschnitte von erwähntem Ursprunge auf den einen Schenkel des Neigungswinkels, dessen anderer die Projections-Achse ist, und fällt von den so erhaltenen Puncten, Perpendikel auf die Projections-Achse, so geben die zwischen diesen Puncten und der Projections-Achse enthaltenen Puncte die vertikalen Projectionen der Peripherie-Puncte des Kreises; die Entfernungen der Fußpuncte dieser Perpendikulären vom Ursprunge der Tracen, die horizontalen Projectionen derselben. Um nun diese beyden Projectionen in die ihnen gehörenden Stellen bequem zu bringen, trage man durch Kreisbögen die so erhaltenen Cosinusse des Neigungswinkels aus dem Ursprung als Mittelpunct auf die früher gelegte auf die horizontale Trace perpendikuläre Gerade, und die Durchschnitte dieser mit den erwähnten Kreisbögen bringe man durch zur horizontalen Trace parallele Geraden auf die verlängerten und respectiven Perpendikel, die von den Peripherie-Puncten auf die horizontale Trace gefällt wurden; und es ergeben sich immer zwey Projections-Puncte auf ein Mahl. Errichtet man

nun durch die so erhaltenen horizontalen Projectionen Perpendikel, und macht sie den respectiven zugehörigen vertikalen Projectionen gleich, so erhält man die vertikale Projection des Kreises. Um nun die erwähnten Fixpuncte zu erhalten, lege man durch die horizontale Trace der gegebenen den Schatten auffangenden Ebene parallel zum Lichte eine Ebene, und suche die Projectionen des Durchschnittes dieser mit der den Kreis enthaltenden Ebene; die Durchschnittspuncte der gleichnahmigen Projectionen des Kreises mit denen des erwähnten Durchschnittes sind die Projectionen der Fixpuncte; die erwähnte Ebene wird dadurch am leichtesten bestimmt, daß man in zwey beliebigen Puncten der horizontalen Trace der gegebenen, den Schatten auffangenden Ebene zwey Gerade annimmt, die zum Lichte parallel sind, und deren Durchgänge mit der den Kreis enthaltenden Ebene sucht; und wie man sehr leicht übersieht, geben diese zwey Durchgangspuncte in der Ebene des Kreises liegend, durch eine gerade Linie verbunden, den Durchschnitt beyder Ebenen so wohl in ihren Projectionen, und eben so kann die Lage der Fixpuncte in ihrer Ebene angegeben werden. Diese Verfahrungsart hat dort ihre Anwendung, wo das Bestimmen des Durchschnittes zweyer Ebenen durch Hülfe ihrer Tracen nicht anzuwenden ist; denn sonst könnten die Projectionen des Durchschnittes der den Schatten auffangenden schiefen Ebene und der Ebene des Kreises gefunden werden. Alle über diesen Fixpuncten liegenden Puncte der Projectionen des Kreises setzen ihren Schatten auf die schiefe Ebene ab, alle anderen auf die Horizontal-Ebene; die Fixpuncte aber in den Durchschnitt dieser beyden Ebenen. Fällt der die Fixpuncte bestimmende Durchschnitt außerhalb den Projectionen des Kreises, so fällt kein Schatten auf die schiefe Ebene. Die Reduction des Schattens auf die schiefe Ebene geschieht nach der Theorie der Durchgänge, und es ist sehr zur Übung, sich die

schiefe Ebene unterhalb der horizontalen Projections-Ebene verlängert zu denken, und den Schatten so construiren, als ob ihn die schiefe Ebene allein auffinge. Früher wurde schon aufmerksam gemacht, daß so oft Ellipsen in den Projectionen erscheinen, diejenigen conjungirten Diameter in der Projection ausgemittelt werden müssen, deren Endpuncte die äußersten Extremitäten der Projection sind; in diesem Falle werden diese Extremitäten erhalten durch zwey Durchmesser in der Ebene des Kreises, deren der eine perpendikulär auf die horizontale Trace der Ebene des Kreises steht,
Fig. 29. der andere aber mit ihr parallel ist. Fig. 29.

Bey Beleuchtung durch Lampenlicht darf nur durch den leuchtenden Punct a, a′ und die horizontale Trace der den Schatten auffangenden Ebene A′C′B′ eine Ebene gelegt werden, um die Fixpuncte zu erhalten; das übrige Ver-
Fig. 30. fahren ist wie in dem vorigen Beyspiele. Fig. 30.

XVI. Aufgabe. Die Projectionen A, A′ einer in der Luft schwebenden Kugel sammt denen des Lichtes ab, a′b und a, a′ für Sonnen- und Lampen-Beleuchtung sind gegeben, man soll den Schatten derselben auf die horizontale Projections-Ebene bestimmen.

Auflösung. Man denke sich die Kugel durch einen Cylinder enveloppirt, dessen Seiten die Lichtstrahlen sind; der Durchschnitt dieses Cylinders mit der horizontalen Projections-Ebene wäre der Schatten der Kugel. Die Tangirung der Kugel und des Cylinders geschieht immer nach einem größten Kreise, dessen Ebene perpendikulär auf die Seiten des Cylinders steht; es dürfen mithin nur die Tracen einer Ebene gesucht werden, die durch den Mittelpunct der Kugel geht, und perpendikulär auf die Seiten des Cylinders oder die Lichtstrahlen steht. Man denke sich nun die so erhaltene Ebene, welche den Beleuchtungskreis der Kugel

enthält, um ihre horizontale Trace bewegt, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist, und construire sich den Mittelpunct und ganzen Kreis des Beleuchtungskreises in seiner umgelegten Ebene. Die Lage des Mittelpunctes in seiner Ebene wird gefunden, wenn man durch die horizontale Projection desselben ein Perpendikel errichtet, und den Durchgang desselben mit der Ebene bestimmt; dieses Perpendikel ist aber immer gleich dem Abstande des Kugelmittelpunctes von der horizontalen Projections-Ebene; ferner durch die horizontale Projection des Mittelpunctes ein Perpendikel auf die horizontale Trace der Ebene führt; verbindet man die Durchgangspuncte dieser zwey Perpendikel mit der Ebene durch eine gerade Linie, so ist diese der Abstand des Mittelpunctes des Beleuchtungskreises von der horizontalen Trace der Ebene; die Aufgabe geht nun ganz auf die vorige zurück, und man darf sich nur über die einzelnen Peripherie-Puncte des Kreises Lichtstrahlen ziehen, und deren Durchgänge mit der horizontalen Projections-Ebene bestimmen, welche die Schattenpuncte der auf den Projectionen angenommenen Peripherie-Puncte seyn werden.

Einfacher wird die Construction, wenn die horizontale Projection des Lichtes parallel zur Projections-Achse ist; in diesem Falle denkt man sich den die Kugel tangirenden Cylinder, und führt durch die Seiten Ebenen, welche auf die horizontale Projections-Ebene perpendikulär sind; die Durchschnitte dieser Ebene mit der Kugel stellen sich in der vertikalen Projection als Kreise dar; die an diese projicirten Durchschnitte geführten Tangenten geben den Schatten, wenn ihre Durchgänge mit der horizontalen Projections-Ebene ausgemittelt werden. Fig. 31. Fig. 31.

Soll die Beleuchtung durch Lampenlicht geschehen, so denke man sich einen Kegel, dessen Scheitel der leuchtende Punct, dessen Seiten die Lichtstrahlen sind, und der die Kugel

tangirt und enveloppirt; die Berührung dieser beyden Oberflächen ist der Beleuchtungskreis, und er ist ein kleiner Kreis der Kugel; nur in dem Falle, daß der leuchtende Punct in unendlicher Entfernung liegt, geht der kleinere Kreis in einen größten, aber auch die Lampen-Beleuchtung in eine Sonnen-Beleuchtung über. Wir wollen hier den Fall annehmen, daß der leuchtende Punct in seinen Projectionen außerhalb denen der Kugel falle, und dann den anderen Fall mit erwähnen; in dem letzten Falle kann der Schatten der Kugel auch ein Kreis werden, wenn nähmlich der aus dem leuchtenden Puncte durch den Mittelpunct der Kugel geführte Strahl auf die horizontale Projections-Ebene perpendikulär ist. Man führe durch den Fußpunct des leuchtenden Punctes an die horizontale Projection der Kugel die tangirenden Ebenen, die bey der Kugel immer die Eigenschaft haben, auf den durch den Berührungspunct geführten Halbmesser perpendikulär zu seyn, und mittle sich die Projectionen der Berührungspuncte aus; diese ergeben sich nähmlich, daß die horizontalen Tracen dieser Ebenen an die horizontale Projection der Kugel tangirend sind, ferner daß ihr Abstand von der horizontalen Projections-Achse gleich dem des Mittelpunctes der Kugel von eben derselben gleich ist; man führe durch den leuchtenden Punct und den Mittelpunct der Kugel eine auf die horizontale Projections-Ebene perpendikuläre Ebene, so wird die Kugel nach einem größten Kreise geschnitten, lasse nun die so erhaltene Ebene um ihre horizontale Trace sich bewegen, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist, und führe in dieser Lage durch den leuchtenden Punct an den Kreis zwey Tangenten und eine durch den Mittelpunct gehende Gerade, der oberste Durchschnitt letzterer mit der Peripherie des Kreises ist der so genannte Glanzpunct; verbindet man die beyden Berührungspuncte durch eine gerade Linie, so ist diese erhaltene Sehne der Durchmesser des Beleuchtungskreises, ihr Durch-

schnitt mit der letztgezogenen, dessen Mittelpunct. Die so erhaltenen Berührungspuncte und den gefundenen Mittelpunct des Beleuchtungskreises projicire man auf die horizontale Trace der gelegten Ebene, und bestimme sich auch deren vertikale Projectionen. Es handelt sich nun, die Tracen der Ebene des Beleuchtungskreises zu bestimmen; man lege mithin eine Ebene durch drey in dem Beleuchtungskreis liegende Puncte, und zwar durch die anfänglich gefundenen Berührungspuncte der tangirenden Ebenen, und durch einen der zuletzt gefundenen Berührungspuncte der Lichtstrahlen. Errichtet man durch die horizontale Projection des Mittelpunctes in der horizontalen Projections-Ebene eine Perpendikuläre, so stellt diese die größere Achse der horizontalen Projection des Beleuchtungskreises vor, und ist gleich dem wahren Durchmesser desselben. Man construire sich nun die Lage des Beleuchtungskreises in seiner Ebene, und das Verfahren geht auf das der früheren Aufgabe zurück, den Schatten eines Kreises zu finden, Fig. 32, allwo a, a′ die Projectionen des leuchtenden Punctes, und A, A′ die der Kugel sind. Fig. 32.

Wäre der leuchtende Punct so gestellt, daß seine horizontale Projection in die horizontale Projection der Kugel fiele, so dürfte auch nur eine durch den leuchtenden Punct und den Mittelpunct der Kugel gehende auf die Horizontal-Ebene perpendikuläre Ebene gelegt, und nach Früherem verfahren werden.

Sollte der Schatten eines Ellipsoides gefunden werden, so dürfte ebenfalls nur die Beleuchtungs-Ellipse construirt werden; die Construction würde in dem Falle zusammengesetzt werden, wenn die Rotations-Achse schief auf die Projections-Ebene wäre; in diesem Falle könnte man sich dadurch helfen, daß man zwey neue Projections-Ebenen annähme, deren die eine parallel, die andere aber perpendikulär auf die Revolutions-Achse wäre, und dann den so

auf der neuen horizontalen oder vertikalen Projections=Ebene gefundenen Schatten, auf die früheren reducirte. Ist diese Regulirung in den Projectionen vorgenommen, so daß die Rotations=Achse mit der horizontalen Projections=Ebene parallel, aber auf die vertikale perpendikulär ist, so ist auf ersterer die Projection des Ellipsoides ein Kreis, auf letzterer die Generatrix. Nach diesen Annahmen wird im Allgemeinen die horizontale Trace der die Lichtstrahlen enthaltenden perpendikulären Ebene schief gegen die Projections=Achse seyn, und sey auch hier angenommen. Denkt man sich nun nach diesen Annahmen das Ellipsoid durch eine Ebene geschnitten, so würde sich dieser Schnitt in der horizontalen Projections=Ebene als eine gerade Linie, in der vertikalen Projections=Ebene als eine Ellipse darstellen; dächte man sich nun an diesen Schnitt die beyden Tangenten, und schließt auf ihre Projectionen, und bestimmt daraus die Durchgänge dieser Tangenten mit der den Schatten auffangenden Oberfläche, hier die horizontale Projections=Ebene. Die Construction dieser Schnitte in den vertikalen Projectionen dürfte aber wohl sehr mühsam seyn, man gelangt daher durch nachstehende Betrachtung eher zum Zwecke: Wie früher schon erwähnt wurde, kann man sich das Ellipsoid aus aneinander liegenden, auf die Rotations=Achse senkrechten Kreisen bestehend denken, betrachtet man nun jeden dieser Kreise und sucht dessen Schatten, so erhält man auf der horizontalen Projection eben so viele in einander verschlungene Ellipsen; verbindet man nun alle diese Ellipsen durch eine Ellipse, welche die früheren alle tangirt, so ist diese der gesuchte Schatten des Ellipsoides. Man übersieht, daß dieses Verfahren sehr lang wäre, und da es sich nur um die Berührungspuncte der ersteren Ellipsen mit der letzten handelt, würde man viele Puncte der ersteren Ellipsen umsonst construiren. Betrachtet man aber den früher erwähnten Schnitt des Ellipsoides und führt an ihn zwey

Tangenten, welche die Lichtstrahlen vorstellen, so kann man sich durch jeden Berührungspunct des Ellipsoides einen auf die Revolutions-Achse senkrechten Schnitt denken, und jeder Schattenpunct des elliptischen Schnittes geht durch den Schattenpunct eines solchen Kreises hervor; hierbey ist zu bemerken, daß die an den elliptischen Schnitt geführten Tangenten oder tangirenden Lichtstrahlen in der Ebene des elliptischen Schnittes liegen, mithin die vertikalen Projectionen derselben in der vertikalen Projection des Schnittes auch als Tangenten erscheinen; jedoch liegen diese Strahlen nicht in der Ebene des erwähnten Kreises. Bey dem früher angegebenen Verfahren, den Schatten des Ellipsoides aus den auf die Rotations-Achse senkrecht angenommenen Kreisen zu finden, ersieht man, daß für jeden Kreis alle jene Strahlen durch das Ellipsoid gedrungen seyn müßten, um ihren Schatten abzusetzen, und nur zwey dieser Strahlen, nähmlich die, welche für jeden Kreis in den zugehörigen Berührungspuncten der erwähnten Tangirungs-Ellipse sich befinden, erscheinen als Tangenten in den vertikalen Projectionen dieser angenommenen Kreise; alle übrigen Strahlen, obschon sie mit jedem Kreise nur einen Punct gemein haben, als Sekanten. Wie die Verfahrungsart für einen Punct des Schattens ist, so ist sie auch für die übrigen. Man schneide daher das Ellipsoid durch eine vertikale zur Projections-Achse parallele Ebene; der Durchschnitt ihrer horizontalen Trace und der horizontalen Projection des Ellipsoides ist die Projection des Durchmessers desjenigen Kreises, nach dem das Ellipsoid geschnitten wurde. Man stelle sich nun diesen Kreis in seiner vertikalen Projection dar, und führe an dieselbe zwey Tangenten parallel zur vertikalen Projection des Lichtes. Die Berührungspuncte bringe man auf die horizontale Trace der gelegten Ebene in ihre Projection, und führe durch diese horizontale Projection Parallele zur horizontalen Projection des Lichtes, welche eigentlich die horizontalen Tracen der

zum Lichte parallel gelegten Ebenen sind, in denen sich die Lichtstrahlen befinden. Die horizontalen Durchgänge dieser Strahlen sind die Schattenpuncte.

Eben so ließe sich für die Beleuchtung beym Lampenlicht verfahren. Die äußersten Puncte des Schattens des Ellipsoides ergeben sich durch die Schattenpuncte des größten Kreises auf das Ellipsoid, und durch die in den an dasselbe geführten tangirenden Ebenen, liegenden Strahlen. Da diese tangirenden Ebenen das Ellipsoid in einer Höhe über der horizontalen Projections-Ebene tangiren, die gleich dem Abstande des Mittelpunctes des Ellipsoides von eben dieser Ebene ist, so ergeben sich die Schatten der Strahlen, die in der tangirenden Ebene enthalten sind, wenn an die horizontale Projection des Ellipsoides parallel zum Lichte zwey Tangenten geführt, und die Berührungspuncte in ihrer vertikalen Projection in oberwähnter Höhe dargestellt würden. Führt man nun durch die horizontale und vertikale Projection der in den an das Ellipsoid tangirenden Ebenen liegenden Berührungspuncte, Strahlen, und stellt sie in ihren Projectionen dar, so ergeben sich die äußersten Schattenpuncte des Ellipsoides.

Fig. 33 und 34. Fig. 33 und 34 bey Sonnen- und Lampen-Beleuchtung, wo ab, a′b′, und a, a′ die Projectionen des Lichtes und A, A′ die des Ellipsoides vorstellen.

Von Wichtigkeit ist es aber, die Construction des Durchschnittes eines Ellipsoides durch eine Ebene zu finden, wie in der Folge gezeigt werden soll.

XVII. Aufgabe. Die Tracen einer Ebene sind gegeben, ferner die Lage eines in derselben liegenden Kreises; derselbe werde durch Sonnen- oder Lampenlicht, dessen Projectionen gegeben sind, beleuchtet; es soll ausgemittelt werden, ob derselbe auf eine durch ihre Conductrix und ihren Scheitel gegebene konische Oberfläche unter diesen Umständen Schatten wirft, und ist dieses

der Fall, so sollen auf den Kreis jene Puncte ausgemittelt werden, die ihren Schatten im Durchschnitte der konischen Oberfläche und der horizontalen Projections-Ebene absetzen; die Gränzen, von welchen aus der Schatten von einer dieser Oberflächen auf eine andere übergeht, können auch oberhalb, unterhalb oder seitwärts der vertikalen Projection des Kreises fallen, welches ein Zeichen wäre, daß aller Schatten auf die horizontale Projections-Ebene, oder aller oder der größere Theil auf die konische Oberfläche, oder gar keiner auf letzterer fiele.

Auflösung. Diese Aufgabe wird in vielen Schriften über Projections-Lehre auf die schleppendste, in der Genauigkeit unrichtigste und mühsamste Art aufgelöst. Man bediente sich hierbey der Construction, daß man durch die, über die einzelnen Puncte des Kreises geführten Lichtstrahlen, Ebenen perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene legte, und die hyperbolischen Schnitte, die so durch die Durchschnitte des Kegels mit diesen Ebenen entstehen, in ihren Projectionen darstellte; die Schattenpuncte selbst ergeben sich durch die Durchschnitte dieser hyperbolischen Schnitte mit den zugehörigen Strahlen; man übersieht leicht, daß die hyperbolischen Schnitte nur durch einzelne Puncte konnten bestimmt werden, und daß mithin der Schattenpunct im Allgemeinen auf einen nicht construirten Punct des Schnittes treffen wird; mithin kann die Schattengränze nie richtig werden, so lange man sich nicht dieser construirten Gränzpuncte der schattenauffangenden Contur bedient; bey dem früheren Beyspiel des Kreises kann von den construirten Projections-Puncten der Projection desselben der Schatten gesucht und strenge bestimmt werden. Da die konische Oberfläche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, so wird jeder Schattenpunct auf den Kegel durch den Durchschnitt einer Seite desselben mit dem zugehörigen

Strahle gefunden, oder es handelt sich, den Durchschnitt der gegebenen konischen Oberfläche mit dem Licht-Cylinder oder Lichtkegel zu finden. Vermöge dem, daß eine Seite des Kegels mit einem Lichtstrahl zusammengefallen ist, und mithin die Durchschnitte beyder in den respectiven Projectionen durch eine Gerade verbunden, dieselbe auf die Projections-Achse perpendikulär ist, ergibt sich sehr leicht aus der Horizontal-Projection dieses Durchschnittes dessen vertikale. Diese Aufgabe ist die Basis für das Durchdringen eines Cylinders oder Kegels mit einem Kegel; und je nachdem diese Aufgabe auf Schatten-Construction oder eigentliches Durchdringen angewendet wird, trifft jeder Strahl eine oder zwey Seiten der anderen Oberfläche. Man bewege nun den Lichtstrahl parallel zu sich selbst in der Conductrix des Kegels, und zwar von dem einen Berührungspuncte der horizontalen Projection des Lichtes und der Conductrix bis zum anderen eben derselben, und bemerke die Durchgänge dieser Strahlen mit der Ebene des Kreises, auf diese Art tracirt sich in der Ebene dieses Kreises im Allgemeinen eine Ellipse, die in ihrer Ebene sowohl als in ihren Projectionen bekannt ist; man bestimme nun die Durchschnitte dieser mit der vertikalen Projection des Kreises, und schließe auf die horizontalen Projectionen dieser Durchschnittspuncte; diese zwey Puncte sind die so genannten Fixpuncte, oder diejenigen, die ihren Schatten in dem Durchschnitte der horizontalen Projections-Ebene und der konischen Oberfläche absetzen. Die Puncte des Kreises, die über diesen Fixpuncten liegen, können ganz oder zum Theil auf die konische Oberfläche Schatten werfen, wie noch später ausgemittelt werden muß; die unterhalb diesen Fixpuncten liegenden Puncte des Kreises setzen ihren Schatten aber nothwendiger Weise auf die horizontale Projections-Ebene ab. Man führe nun zum Lichte parallel an die konische Oberfläche zwey tangirende Ebenen, und bestimme die Durchschnitte dieser mit der Ebene des Kreises. Die zwischen den

Fixpuncten und dem Durchschnitte des Kreises und der eben gefundenen Durchschnitte liegenden Puncte setzen ihren Schatten nun nicht mehr auf den Kegel ab; und nur die oberhalb der Fixpuncte und zwischen den erhaltenen Durchschnitten liegenden Puncte des Kreises werfen auf die konische Oberfläche Schatten. Man nehme den Lichtstrahl und bewege ihn parallel zu sich selbst nach dem Scheitel des Kegels, und suche in dieser letzten Lage des Strahles seinen Durchgang mit der Ebene des Kreises. Da man nun diejenigen Puncte kennt, die ihren Schatten auf den Kegel werfen, mithin auch die Projectionen der respectiven Strahlen bekannt sind, so kommt es nur darauf an, zu jeden von diesen angenommenen Strahlen die Seiten des Kegels aufzufinden, mit denen dieselben in einen Punct zusammentreffen. Dafür lege man für einen auf den Kreis angenommenen Punct nach den Durchgangspunct des durch den Scheitel gelegten Strahles mit der Ebene des Kreises eine Gerade, und bemerke den Durchschnitt derselben mit der auf eben dieser Ebene tracirten Curve; führt man durch diesen so erhaltenen Durchschnitt einen Strahl und sucht dessen horizontalen Durchgang, der nothwendig in die Conductrix des Kegels fallen muß, mittelt sich ferner die durch diesen Punct gehende Generatrix des Kegels aus, so ist sie diejenige Seite desselben, die mit dem über den auf dem Kreise angenommenen Puncte geführten Strahle sich schneidet, oder diejenige, auf welche der angenommene Punct des Kreises seinen Schatten absetzt; aus der so gefundenen horizontalen Projection läßt sich auf die vertikale, oder umgekehrt schließen. Da jeder Strahl zwey Seiten der konischen Oberfläche trifft, so ergibt sich die andere ganz auf ähnliche Art, wenn nur die oben erwähnte tracirte Curve ganz geschlossen dargestellt wird. Soll die Beleuchtung beym Lampenlicht geschehen, so hat ein ganz ähnliches Verfahren Statt, nur daß die auf der Ebene des Kreises tra-

cirte Curve durch den Durchschnitt eines Kegels hervorgeht, ferner der Durchgang des aus dem leuchtenden Puncte nach dem Scheitel des Kegels gehenden Strahles noch auszumitteln ist, wo hingegen im anderen Falle dieser Durchgang durch eine durch den Scheitel des Kegels gehende zum Lichte parallele Gerade hervortritt. Fig. 35, 36.

Fig. 35, 36.

Würde eine Kugel auf einen Kegel Schatten werfen, so dürfte nur der früher erwähnte Beleuchtungskreis ausgemittelt werden, und das Verfahren wäre wie hier gezeigt wurde.

Wäre statt des Kreises eine Kugel oder eine andere Revolutions-Oberfläche gegeben, so dürfte nur die Beleuchtungs-Contur vorläufig bestimmt werden.

In Fig. 35 und 36 ist ACB die gegebene, den Kreis enthaltende Ebene, cd, c d′ und a, a′ die Projectionen des Lichtes, e, e′ die des Scheitels des Kegels, und DD′D″ die der Conductrix oder Basis desselben.

XVIII. Aufgabe. Allgemeine Darstellung der Kegelschnitte.

Auflösung. Es seyen die Projectionen der Conductrix ABCD und die des Scheitels a, a′ einer konischen Oberfläche, und die Tracen einer den Kegel schneidenden Ebene A′C′B′ gegeben, so übersieht man leicht, daß, um den Schnitt in seinen Projectionen zu erhalten, man nur die Durchgänge der Seiten des Kegels mit der gegebenen Ebene zu bestimmen hat. Aus der Theorie der Durchgänge gerader Linien und einer Ebene weiß man aber, daß es nur darauf ankommt, sich für jeden derselben eine Gerade darzustellen, die sowohl in der gegebenen Ebene, als auch in der Projections-Ebene der Linie, nähmlich in der durch die gegebene Gerade gehende auf die horizontale oder vertikale Projections-Ebene perpendikulären Ebene liegt. Legt man durch die Achse des Kegels eine auf die horizontale Projections-

Ebene perpendikuläre Ebene, so wird die konische Oberfläche durch dieselbe, wenn sie sich um diese Achse dreht, immer nach Seiten der konischen Oberfläche geschnitten. Nimmt man eine Lage der durch die Achse der konischen Oberfläche gehenden, auf die horizontale Projections-Ebene perpendikulären Ebene, und mittelt sich ihren Durchschnitt mit derselben oder die Seiten, welche durch diesen Schnitt auf der konischen Oberfläche hervorgehen, aus, so kommt es nur darauf an, sich eine Gerade darzustellen (welche immer der Durchschnitt der beweglichen und gegebenen Ebene ist), die sowohl in der gegebenen, den Kegel schneidenden Ebene, als auch in der die erwähnten Seiten enthaltenden Ebene sich befindet. Die Durchschnitte dieser mit den beyden früher gefundenen Seiten der konischen Oberfläche geben Puncte des Kegelschnittes. Um die letzt erwähnte Gerade zu construiren, wäre die einfachste Art, in der horizontalen Trace der gelegten perpendikulären Ebene zwey beliebige Puncte anzunehmen von diesen auf die horizontale Projections-Ebene Perpendikel fällen, und die Durchgänge dieser mit der gegebenen Ebene zu bestimmen; beyde durch eine Gerade verbunden gäben das Gesuchte. Da der Durchgang der Achse des Kegels mit der gegebenen Ebene constant ist, so mittle man sich diesen aus, und es bedarf nur für jede Lage der perpendikulären Ebene noch eines Punctes, der sowohl in der gegebenen Ebene als in jener liegt, um die oberwähnte Gerade zu erhalten. Die einen zwey Gränzpuncte der vertikalen Projection des Kegelschnittes erhält man, wenn man die Durchschnitte jener Seiten des Kegels mit der gegebenen Ebene sucht, die zu den Berührungspuncten der auf die Projections-Achse perpendikulären, die horizontale Projection der Conductrix tangirenden Geraden gehören. Die anderen zwey Gränzpuncte, oder mit andern Worten, die Endpuncte der in der vertikalen Projection als kleinere Achse erscheinenden Geraden (denn es wurde früher schon

erwähnt, daß bey zwey elliptischen Projectionen nicht die äußersten vier Endpuncte auch immer die Endpuncte der beyden Achsen der gegebenen Ellipse sind, sondern diese vier, je zwey und zwey entgegengesetzt, durch eine Gerade verbunden, sind bloß coniungirte Diameter), geben sich auf folgende Art: Ist die Größe der einen Achse der Projection des Schnittes ausgemittelt, so führe man durch deren Halbirungspunct auf dieselbe eine Senkrechte, und lege durch diese eine auf die vertikale Projections-Ebene perpendikuläre Ebene, und construire sich den Durchschnitt dieser neuen Ebene mit der gegebenen schneidenden Ebene; da dieser Durchschnitt eine Gerade ist, so dürfen nur jene zwey Seiten des Kegels ausgemittelt werden, die mit dieser Geraden zusammenfallen. Dafür lege man durch den Scheitel des Kegels eine Parallele zum gegebenen Durchschnitte, und construire sich die horizontale Trace der durch diese beyden erwähnten Geraden gelegten Ebene. Die Durchschnitte dieser Trace mit der Basis des Kegels geben die Puncte, von denen aus die Seiten des Kegels genommen werden müssen, um den gegebenen Durchschnitt jede in einem Punct, zu treffen.

Die verschiedenen Kegelschnitte werden durch die Annahme der Tracen der die konische Oberfläche schneidenden Ebene bestimmt; die Ellipse ergibt sich, wenn die gegebenen Tracen einer Ebene angehören, die schief auf die Achse des Kegels steht, wie die oben erklärte Aufgabe zeigt; die Parabel, wenn die Ebene parallel zu einer Seite der konischen Oberfläche ist; die Hyperbel, wenn die schneidende Ebene parallel zu zwey Seiten des Kegels genommen wird. Fig. 37,
Fig. 37, 38, 39. 38, 39. Ist ein Kegel und eine Ebene gegeben, so kann immer leicht ausgemittelt werden, zu welcher der drey erwähnten Curven der Schnitt gehört, und zwar wenn man durch den Scheitel des Kegels eine zur schneidenden Ebene parallele Ebene legt. Fällt die horizontale Trace dieser so

gelegten Ebene außerhalb der Basis des Kegels, so ist der Schnitt eine Ellipse; tangirt die horizontale Trace die Basis des Kegels, eine Parabel; und schneidet endlich die horizontale Trace die Basis, eine Hyperbel.

Um zu einer Seite eines Kegels durch einen auf denselben gegebenen Punct eine parallele Ebene zu legen, müssen zwey Fälle berücksichtiget werden: entweder liegt der gegebene Punct auf derjenigen Seite des Kegels, die durch den Durchschnitt der durch die gegebene Seite und die Achse desselben gelegten Ebene mit der Oberfläche hervorgeht; in diesem Falle lege man durch den gegebenen Punct in der erwähnten Ebene eine Parallele zur gegebenen Seite, und führe durch diese Parallele eine perpendikuläre Ebene auf die frühere; diese Ebene ist dann die gesuchte; ist aber der gegebene Punct nicht in obgedachter Eigenschaft gegeben, so lege man nur durch den gegebenen Punct zur früheren Ebene eine parallele Ebene, in dieser eine Parallele zur gegebenen Seite, und durch diese eine Ebene *).

XIX. Aufgabe. Ein Cylinder sey durch die Projectionen seiner Generatrix ab, a′b′ und Conductrix ABCD gegeben; ferner seyen die Tracen einer Ebene A′C′B′ gegeben, man soll die Projectionen des Scheitels, und die Ausbreitung des Cylinders sammt der des Schnittes construiren.

---

*) Die durch den gegebenen Punct und die geführte Gerade gelegte Ebene darf nicht wie oben eben perpendikulär seyn, denn denkt man sich eine cylindrische Oberfläche und durch die Achse derselben eine bewegliche Ebene, so wird diese in jeder ihrer Lagen zu jeder Seite dieser Oberfläche immer parallel seyn; es kann daher in obiger Aufgabe, damit sie bestimmt ist, noch eine Bedingung mit eintreten. Wir werden aber immer eine perpendikuläre Ebene nehmen.

Auflösung. Es dürfen hier nur die Durchgänge der Seiten des Cylinders mit der gegebenen Ebene ausgemittelt werden; um das Developpement zu erhalten, stelle man sich die Conductrix als eine gerade Linie ausgebreitet vor, und an jeden Punct des Schnittes die tangirende Ebene, nehme dann an, daß jede so geführte tangirende Ebene mit ihrem zugehörigen Puncte des Scheitels sich um ihre horizontale Trace bewege, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist, und mittle sich die perpendikulären Abstände jedes Punctes von der horizontalen Trace der tangirenden Ebene aus, welche dann, auf die respectiven Puncte der developpirten Conductrix gebracht, das Gesuchte geben. Auf ähnliche Art würde die Ausbreitung einer konischen Oberfläche geschehen. Fig. 40, 41. Ganz auf dieselbe Art würde auch der Schnitt eines Kegels oder Cylinders durch eine Ebene in seiner Ebene dargestellt werden, indem aus den Projectionen der Puncte des Schnittes sich die Lage eben derselben in ihrer Ebene ausmitteln lassen, nachdem die schneidende Ebene sich um ihre horizontale Trace bewegte, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist*). Eben so leicht fände man den wah-

Fig. 40, 41.

*) Da bey der oben angeführten Darstellung des Developpements oder der Ausbreitung die Developpirte als Gerade erscheint, die Generatrixen aber unter jenen Winkeln gegen die Developpirte in der Ausbreitung dargestellt werden müssen, den die Generatrixen gegen die horizontalen Tracen der zugehörigen tangirenden Ebenen bilden, diese Winkel bey cylindrischen Oberflächen wohl constant, bey schiefen konischen aber veränderlich wären, so ist das zweckmäßige, wenn man sich sowohl auf der cylindrischen als konischen Oberfläche einen rechten Schnitt denkt, nähmlich einen Schnitt perpendikulär auf die Achse, und diesen ausgebreitet darstellt, die Ausbreitung desselben heißt Ausbreitungsachse; bey dem Kegel nun ist dieselbe ein Kreis, dessen Halbmesser gleich der Entfernung des Scheitels von einem Puncte des

ren Schnitt, wenn die schneidende Ebene sich um ihre vertikale Trace bewegte, bis sie mit der vertikalen Projections-Ebene zusammengefallen ist; in Fig. 40 und 41 wurde ersteres angenommen.

XX. Aufgabe. Durchschnitt eines Kegels und Cylinders und umgekehrt.

Auflösung. Es wurde schon früher erwähnt, auf welche Art die Durchschnitte zweyer cylindrischer oder zweyer konischen Oberflächen gefunden werden. Durchdringen sich ein Kegel und Cylinder, so kommt es nur darauf an, da jeder Punct des Durchschnittes durch den Durchschnitt einer Seite des Kegels mit der des Cylinders hervorgeht, zu jeder angenommenen Seite des Kegels diejenige des Cylinders zu finden, die mit ersterer zusammentrifft. Man nehme nun eine Seite des Kegels und lege durch einen beliebigen Punct von ihr eine Parallele zur Generatrix des Cylinders; durch diese beyden Geraden führe man eine Ebene, und be-

---

rechten Schnittes ist. Denkt man sich diesen rechten Schnitt sowohl auf den Cylinder in, der Bequemlichkeit wegen, gleiche Theile getheilt, und in eben so viele und gleiche Theile auch die Ausbreitungsachse, und zieht auf den Theilungspuncten der Ausbreitungsachse die Generatrixen (die bey dem Cylinder perpendikulär auf dieselbe, bey der konischen Oberfläche aber nach einem Puncte gehend sind), und bestimmt aus den Projectionen eines jeden Punctes des Durchschnittes des Cylinders oder Kegels durch die Ebene, die Entfernung desselben von demjenigen Puncte des rechten Schnittes, der auf derselben Generatrix sich befindet, wie der zu developpirende Punct des erwähnten Durchschnittes, so gibt diese Entfernung auf die entsprechende ausgebreitete Generatrix die Ausbreitung des angenommenen Durchschnittspunctes, der durch den Durchschnitt des Cylinders oder Kegels durch die Ebene hervorging.

stimme deren horizontale Trace. Der Durchschnitt dieser mit der Conductrix des Cylinders gibt jene Puncte des Cylinders, durch welche Generatrixen geführt, selbe mit der angenommenen Seite des Kegels zusammentreffen; da aber der Kegel durch jede solche Ebene im Allgemeinen nach zwey Seiten geschnitten wird, so erhält man immer durch die horizontale Trace jeder so gelegten Ebene zwey Durchschnitte in der Conductrix des Kegels, und zwey in der des Cylinders, mithin zwey Seiten des Kegels und zwey des Cylinders, die sich schneiden, mithin vier Puncte des Durchschnittes beyder Oberflächen. Tritt aber der Fall ein, daß nicht alle Seiten des Kegels in den Cylinder treten, so können sie auch keine Durchschnittspuncte liefern, welches die Construction immer angeben wird. Dringt ein Cylinder in einen Kegel, so lege man nur zu einer angenommenen Seite des Cylinders eine Parallele durch den Scheitel des Kegels, und durch diese beyden Geraden eine Ebene; bestimme sich die horizontale Trace derselben, und die Durchschnitte derselben mit den Conductrixen des Cylinders und Kegels geben die zusammengehörigen Seiten beyder Oberflächen; das übrige Verfahren ist wie früher. Fig. 42, 43; wobey ABCD die Projectionen der Basis der Cylinder A′B′C′D′, die der Kegel ab, a′b′ und cd, c′d′ die der Generatrixen derselben, und a, a′ die des Scheitels des Kegels sind.

Fig. 42, 43.

XXI. Aufgabe. Es seyen zwey Kugeln in der Luft gegeben, sie werden entweder durch Sonnen- oder Lampenlicht beleuchtet; man soll ausmitteln, ob unter den gegebenen Umständen die eine Kugel auf die andere Schatten werfen könne oder nicht, und wenn ersteres der Fall ist, so soll auf der ersten Kugel der Theil der Beleuchtungs-Contur ausgemittelt werden, der auf die andere Kugel, und der welcher auf die horizontale Projections-Ebene Schatten wirft; und eben so soll in Bezug auf die

andere Kugel ausgemittelt werden, welcher Theil von ihr einen sichtbaren Schatten wirft.

Auflösung. Man bestimme sich vor allem, als ob jede Kugel für sich allein vorhanden wäre, die Tracen der Beleuchtungs-Conturen und deren Projectionen; nehme nun den Lichtstrahl und lasse ihn an der Peripherie der zweyten Beleuchtungs-Contur bewegen, und suche dessen Durchgänge mit der Ebene der anderen Beleuchtungs-Curve; diese so erhaltenen Durchgänge verbunden geben nun eine Curve, und muß nun mit der ersten Beleuchtungs-Contur näher betrachtet werden. Jene kann mit dieser nun gemeinschaftliche Puncte haben oder nicht, oder erstere kann ganz oder zum Theil ober- oder unterhalb der letzteren liegen. Die, beyden Curven gemeinschaftlichen, Puncte sind solche, durch welche Strahlen geführt, beyde Oberflächen davon tangirt werden, die mithin ihren Schatten auf der horizontalen Projections-Ebene absetzen. Liegt die tracirte Curve ganz und oberhalb der Beleuchtungs-Curve, so wirft jede Kugel ihren ganzen Schatten auf die Horizontal-Ebene; liegt dieselbe ganz unterhalb der Beleuchtungs-Curve, so werfen ebenfalls beyde ihren Schatten ganz auf die Horizontal-Ebene; nur mit dem Unterschiede, daß im zweyten Falle die erste Kugel über die zweyte ihren Schatten wirft; die innerhalb der Beleuchtungs-Curve liegenden Puncte der tracirten Curve können keinen Schatten werfen. Tracirt man eben so auf der zweyten Beleuchtungs-Contur eine Curve, indem man den Lichtstrahl über die Gränzpuncte des ersten Beleuchtungskreises tracirt, so werden jene Strahlen auf der zweyten Kugel aufgefangen, die innerhalb der zweyten Beleuchtungs-Curve liegen, und es handelt sich nur wieder, wie früher, um diese Curve zu traciren, den Durchschnitt eines Cylinders oder Kegels, je nachdem Sonnen- oder Lampen-Beleuchtung da ist, durch eine Ebene zu finden. Die Con-

struction des von der zweyten Kugel aufgefangenen Schattens der ersten beruht auf dem Auffinden des Durchschnittes eines Kegels oder Cylinders, und einer Kugel. Geschieht die Beleuchtung beym Sonnenlicht, so steht jeder Lichtstrahl auf die Beleuchtungsebene perpendikulär; denkt man sich den Durchgangspunct des Strahles mit der Beleuchtungsebene mit dem Mittelpuncte verbunden, und führt nach dem Durchschnitt des Strahles mit der Kugel einen Halbmesser, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreyeck, davon die Hypothenuse und eine Kathete bekannt ist; läßt man nun die Ebene dieses Dreyeckes um ihre horizontale Trace sich bewegen, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfällt, und construirt sich diese Dreyecke, und schließt dann zurück auf die Projectionen der Durchgangspuncte der Strahlen und der Kugel, so ergibt sich das Gesuchte. Einfacher würde die Construction, wenn die vertikale Projections-Ebene parallel zum Lichte angenommen würde, und das Licht parallel zu der die Mittelpuncte beyder Kugeln verbindenden Geraden wäre, Fig. 44, wobey AA′, BB′ die Projectionen der Kugeln, und ab, a′b′ die des Lichtes sind. Fig 44.

Da bey Beleuchtung einer Kugel beym Lampenlicht keine Seite des Beleuchtungskegels auf die Beleuchtungs-Ebene perpendikulär steht, wohl aber der durch den Mittelpunct der Kugel gehende Strahl; so wenn der Mittelpunct des Beleuchtungskreises ausgemittelt ist, darf nur durch diesen Punct auf den erwähnten Strahl eine perpendikuläre Ebene gelegt werden, deren Tracen die der Beleuchtungs-Contur seyn werden, verbinde dann jeden Durchgangspunct des Strahles mit der Beleuchtungsebene durch eine Gerade mit dem Mittelpuncte der Kugel; auf diese Art entsteht ein Dreyeck, dessen eine Seite die schon erwähnte Gerade, dessen andere die vom leuchtenden Puncte nach dem Mittelpuncte der Kugel gezogene Gerade, und dessen dritte Seite der vom

leuchtenden Punct bis zum Begegnungspuncte mit der Beleuchtungsebene gezogene Strahl ist. Zieht man noch nach dem Schattenpuncte auf der Kugel einen Halbmesser, und bewegt die Ebene des so erhaltenen Dreyeckes um die horizontale Trace dieser mit der Horizontal-Ebene zusammengefallenen Ebene, und bringt den Durchschnitt des Halbmessers und Strahles als den Schattenpunct auf seinen ihm zugehörigen Ort, so ergibt sich das Gesuchte, Fig. 45; und dafür sind dieselben Beziehungen analog mit den der früheren Figur, nur ist a, a′ der leuchtende Punct. Fig. 45.

XXII. Aufgabe. Die Generatrix eines Ellipsoides ist gegeben, ferner die Tracen einer Ebene, man soll den Durchschnitt beyder Oberflächen finden.

Auflösung. Entweder ist die Ebene schief auf die Rotations-Achse, oder mit ihr parallel. Wir wollen den ersten Fall betrachten: Man mittle sich die Projectionen der Generatrix und die Tracen ihrer Ebene für die beyden Fälle aus, in welchen sie perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene, und das andere Mahl deren kleinere Achse horizontal ist, und bestimme in diesen beyden Lagen die Durchschnitte der gegebenen Ebene und der Ebene der Generatrix; diese vier Durchschnittspuncte, welche je zwey und zwey durch die beyden Lagen der Generatrix hervorgingen, stelle man auf der Generatrix dar und fälle von ihnen Perpendikel auf die Rotations-Achse; führt man eben so von den zwischen obigen je zwey und zwey zusammengehörigen Puncten Perpendikel auf diese Achse, und legt durch diese Perpendikel Ebenen perpendikulär auf die Rotations-Achse, und bestimmt zugleich die Durchschnitte dieser Ebenen mit der gegebenen schneidenden Ebene; sucht man nun den Durchschnitt jedes obigen Perpendikels mit dem erwähnten Durchschnitt, so ist dieser ein Punct des gesuchten Schnittes.

Für den andern Fall ist die Verfahrungsart eben so. Die Richtungen der Achsen des Schnittes ergeben sich dadurch, daß man durch die Rotations-Achse auf die schneidende Ebene eine perpendikuläre Ebene legt, und auf dem sich hieraus ergebenden Durchschnitt auf dessen Halbirungs-
Fig. 46. punct eine Perpendikuläre errichtet. Fig. 46 ist ABCD die wahre Generatrix und A′C′B′ die schneidende Ebene, AB, A″B″ die Rotations-Achse *).

XXIII. Aufgabe. Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel.

Auflösung. Für den Fall, daß man die vertikale Projections-Ebene parallel zur Generatrix des Cylinders nähme, unterläge die Construction keiner Schwierigkeit, da jede durch die Generatrixen perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene gelegte Ebene die Kugel dadurch nach einem Kreise schneidet, der in seiner vertikalen Projection wieder als ein solcher erscheinen wird. Nähme man aber die vertikale Projections-Ebene schief gegen die Generatrix des Cylinders, so denke man sich die Kugel durch zur horizontalen Projections-Ebene parallele Ebenen geschnitten, und sehe jeden solchen Schnitt als die Conductrix eines Cylinders an, dessen Generatrix der des gegebenen gleich ist;

---

*) Man kann sich auch durch die Rotations-Achse eine Ebene gelegt, und sie beweglich denken; construirt man sich nun die successiven Durchschnitte dieser mit der schneidenden Ebene und läßt jedesmahl die bewegliche Ebene (Mittelebene) um ihre horizontale Trace bewegen, um die Durchschnittspuncte der erwähnten Durchschnitte mit der Generatrix des Ellipsoides zu erhalten, so ergibt sich das Gesuchte, indem man dann die bewegliche Ebene wieder in ihre primitive Lage zurückbringt, und auf die Projectionen dieser Durchschnittspuncte schließt.

der Durchschnitt jedes solchen Cylinders mit der horizontalen Projections-Ebene ist ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem seiner Conductrix ist, und um den Mittelpunct davon zu finden, darf nur der Durchgang der durch den Kugelschnitt geführten Generatrix mit der horizontalen Projections-Ebene gefunden werden. Die Durchschnittspuncte der Conductrix des gegebenen Cylinders mit den Durchschnitten der angenommenen Cylinder und der Horizontal-Ebene sind solche, durch welche Generatrixen geführt, und deren Durchgänge mit den Ebenen der respectiven Kegelschnitte gesucht werden müssen; die so erhaltenen Durchgänge sind Puncte des gesuchten Durchschnittes. Fig. 47, A, A′ sind die Projectionen der Kegel, BCDE die der Basis des Cylinders, und ab, a′b′ die der Generatrix desselben. Fig. 47.

XXIV. Aufgabe. Durchschnitt einer konischen Oberfläche und einer Kugel.

Auflösung. Die eben angeführte Construction für den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel hat auch hier ganz dieselbe zu bleiben; nur tritt hier der Fall ein, daß die Generatrixen nicht unter sich parallel, sondern nach einem Puncte gehend sind. Fig. 48, wo a, a′ der Scheitel Fig. 48.
des Kegels ist, A, A′ die Projectionen der Kugel, und BCDE die der Basis des Kegels sind.

XXV. Aufgabe. Durchdringung eines Cylinders oder Kegels und eines Ellipsoides.

Auflösung. Ist die Rotations-Achse perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene, so ist jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt ein Kreis, und die Construction wäre so, wie oben für die Kugel gezeigt wurde. Tritt der Fall ein, daß die Revolutions-Achse schief gegen die

horizontale Projections-Ebene ist, so kommt es auf die Lage der das Ellipsoid schneidenden Ebene an, um daß die Durchschnitte der konischen oder cylindrischen Oberfläche, deren Conductrixen diese Schnitte sind, mit der horizontalen Projections-Ebene Kreise werden. Wir wollen die Ausmittelung der Lage der schneidenden Ebene für das Durchdringen eines Cylinders und Ellipsoides anwenden; dieselbe Bestimmung würde für das Durchdringen eines Kegels und Ellipsoides gelten.

Man lege durch den Mittelpunct der Rotations-Achse eine Parallele zur Generatrix des Cylinders, und führe durch diese und jene eine Ebene, und sie sey in diesem Falle perpendikulär auf die Horizontal-Ebene. In dieser so gelegten Ebene führe man durch die früher angenommene Generatrix des Cylinders eine auf obige Ebene perpendikuläre Ebene, so stehen die horizontalen Tracen dieser beyden Ebenen auf einander senkrecht, und in ihnen sind die Durchmesser der zu erhaltenden Kreise aus den Projectionen der elliptischen Schnitte durch die Generatrixen des Cylinders enthalten. Man denke sich nun die Generatrix des Ellipsoides in der Lage, daß sie auf die erste gelegte Ebene perpendikulär ist, und suche den Durchschnitt ihrer Ebene mit der zweyten gelegten Ebene; dieser Durchschnitt wird zur horizontalen Projections-Ebene sowohl als auch zur horizontalen Trace der zweyten Ebene parallel seyn. Die Entfernung der Durchschnittspuncte des erwähnten Durchschnittes mit der Curve der Generatrix des Ellipsoides ist gleich der Achse der Generatrix des letzteren. Führt man nun durch die so erhaltenen Durchschnittspuncte Parallele zur Generatrix des Cylinders, so treffen diese die horizontale Projections-Ebene in der Trace der früher erwähnten zweyten gelegten Ebene. Die Entfernung der Durchgänge dieser letzt gelegten Generatrixen des Cylinders auf der horizontalen Projections-Ebene von dem Durchschnitte der beyden

horizontalen Tracen der zwey früheren Ebenen, dürfen nur von diesem Durchschnitt aus noch auf die andere Trace aufgetragen werden, und diese vier Puncte gehören einem Kreise an. Es handelt sich jetzt nur noch um die Drehung der Generatrix des Ellipsoides um ihre horizontale kleinere Achse, daß wenn man sie in ihrer neuen Lage als Conductrix eines Cylinders ersieht, dessen Seiten die des gegebenen sind, der Durchschnitt dieses neuen Cylinders mit der horizontalen Projections-Ebene dieser Kreis ist. Man führe dafür durch beyde auf die horizontale Trace der zweyten Ebene aufgetragene Puncte Generatrixen des Cylinders, so befinden sich diese in der ersten gelegten durch die Rotations-Achse gehenden auf die horizontale Projections-Ebene perpendikulären Ebene; nimmt man nun in dieser Ebene vom angenommenen Mittelpuncte des Ellipsoides aus die halbe größere Achse des Ellipsoides, und schneidet damit die beyden letztgeführten Generatrixen des Cylinders, so ergeben sich zwey Puncte, die früheren zwey Endpuncte der kleineren Achse, und diese liegen in der gesuchten Ebene, deren Tracen leicht bestimmt werden können. Diese Ebene ist diejenige, nach welcher das Ellipsoid geschnitten werden muß, damit wenn diese Sectionen als Conductrixen von Cylindern angesehen werden, die Durchschnitte derselben mit der horizontalen Projections-Ebene Kreise werden; die Durchschnitte von letzteren mit der Conductrix des gegebenen Cylinders geben Puncte an, über welche Generatrixen geführt, und deren Durchschnitte mit der zugehörigen Section des Ellipsoides gesucht werden müssen, um den Durchschnitt des Cylinders mit dem Ellipsoid zu erhalten; die Durchgänge der Generatrixen mit den respectiven Sectionen sind Puncte des gesuchten Durchschnittes, und nun dürften zur Bestimmung anderer Puncte nur zur gefundenen Ebene parallele Ebenen gelegt werden. Für die Durchdringung einer konischen Oberfläche und eines Ellipsoides gilt dieselbe

Fig. 49, 50. Verfahrungsweise; Fig. 49, 50; AC′D die Generatrix in ihrer wahren Größe, AB, A′B die Rotations-Achse, CDEF die Basis des Cylinders, ab, a′b′ die Generatrix desselben, a, a′ der Scheitel des Kegels.

In dem allgemeinen Falle würde man sich durch die Rotations-Achse und durch die durch den Mittelpunct des Ellipsoides gelegte zur Generatrix des Cylinders parallele Gerade eine Ebene legen, und deren horizontale Trace bestimmen, und dann durch diese Seite des Cylinders auf die so gelegte Ebene eine Perpendikulär-Ebene mit Ausmittelung ihrer horizontalen Trace. Nach geschehener Ausmittelung der Durchschnitte dieser zwey Ebenen mit der Ebene der Generatrix wäre das Verfahren eben so, wie in dem vorigen mit den beyden Achsen der Generatrix des Ellipsoides.

XXVI. Aufgabe. Durchschnitt zweyer Kugeln.

Auflösung. Denkt man sich die Kugeln durch zur horizontalen Projections-Ebene parallele Ebenen geschnitten, so erhält man in der horizontalen Projection Kreise für die Projectionen beyder Kugelschnitte. Die Durchschnitte dieser Projectionen sind Puncte des gesuchten Durchschnittes. Da die Kugel unter den Rotations-Oberflächen die einfachste ist, so ist es auch eben so einfach, den Schnitt einer Kugel durch eine Ebene zu finden. Man führe nur durch den Mittelpunct der Kugel auf die gegebene Ebene eine Perpendikuläre, der Durchgang derselben mit der gegebenen Ebene ist der Mittelpunct des Schnittes; die Größe des Perpendikels gibt den Abstand vom Mittelpuncte, in den eine Kugel geschnitten wurde, mithin auch den Halbmesser des Schnittes, dessen Projectionen nach Früherem leicht gefunden werden
Fig. 51. kann, Fig. 51, wobey A, A′ und B, B′ die beyden Kugeln sind.

Anmerkung. Die Durchdringung zweyer Ellipsoiden, so wie

die der Revolutions=Oberflächen und konischen oder cylindrischen Oberflächen, kann nach den nun aufgestellten Sätzen leicht geschehen. Diese Principien sind hinlänglich, um alle vorkommenden Constructionen auf die einfachste Weise auszuführen; sie enthalten auch alles, was in Bezug auf den Steinschnitt vorkommen kann. Hierbey bedarf man vorzüglich die wahre Größe irgend eines Durchschnittes; ein Beyspiel dafür wäre der Durchschnitt eines Kegels und einer Ebene.

Der Wichtigkeit wegen soll die schon früher in der Zusammenstellung erörterte Aufgabe: »Wenn die Projectionen »einer Geraden, ferner die des Scheitels und der Basis ei»ner konischen Oberfläche gegeben sind, den Durchgang je»ner mit dieser zu finden, noch mit aufgestellt werden.«

Denkt man sich durch die gegebene Gerade und den Scheitel der konischen Oberfläche eine Ebene, und bestimmt deren horizontale Trace, so gibt der Durchschnitt dieser mit der Basis des Kegels jene Puncte, durch die man sich die Seiten des Kegels geführt denken muß, die mit der gegebenen Geraden zusammenfallen. Stellt man die so gefundenen Seiten in ihrer vertikalen und horizontalen Projection dar, so geben die Durchschnitte der horizontalen Projection der gegebenen Generatrix mit der horizontalen Projection der erwähnten Seiten des Kegels, und die Durchschnitte der vertikalen Projection der gegebenen Geraden mit den vertikalen Projectionen eben dieser Seiten, die horizontalen und vertikalen Projectionen der Durchgänge der gegebenen Geraden mit der konischen Oberfläche, Fig. 52, Fig. 52. wo a, a′ der Scheitel, ABCD die Basis des Kegels, und bb′, cc′ die gegebene Gerade vorstellt.

Bey allen den nun vorangegangenen Constructionen wurden die Projections=Ebenen beliebig angenommen; und dieses mußte der Allgemeinheit wegen geschehen; man wird aber leicht übersehen, daß in vielen Fällen, da die Wahl

der Projections-Ebenen beliebig ist, man durch eine schickliche Annahme derselben leichter znm Zwecke kommt; diese Annahme besteht darin, daß man die vertikale Projections-Ebene parallel oder perpendikulär auf die bey der Construction vorkommenden Ebenen annimmt. Nehmen wir z. B. einen rechten Kegel, dessen Basis ein Kreis ist, der durch eine andere Ebene nach einer Ellipse geschnitten werden soll. Hier wird es sehr zweckdienlich seyn, die vertikale Projections-Ebene perpendikulär auf die schneidende Ebene anzunehmen; diese Annahme wird dadurch ausgedrückt, daß die horizontale Trace der schneidenden Ebene perpendikulär auf die Projections-Achse ist, es ist also auch der Neigungswinkel der Ebene gleich dem aus der vertikalen Trace der Ebene und der Projections-Achse gebildeten. Die Entfernung der Durchschnitte der vertikalen Trace der Ebene und der beyden äußersten vertikalen Projectionen der Seiten des Kegels geben die größere Achse der Ellipse. Um nun übrige Puncte des Schnittes zu erhalten, kann man die früher gegebene Construction, oder noch die anderen nachfolgenden Constructions-Arten benützen; dabey ist noch zu bemerken, daß man nur nöthig hat, sich die eine Hälfte der Ellipse zu construiren, indem die andere sich durch bloßes Übertragen ergibt. Man führe durch den Mittelpunct der Basis des Kegels zwey auf einander senkrechte Durchmesser, den einen parallel zur Projections-Achse, den anderen parallel zur horizontalen Trace der schneidenden Ebene, so sind in diesen beyden Durchmessern die Projectionen der Achsen des Schnittes enthalten. Die Projection der größeren Achse ergibt sich, daß man die früher erwähnten Durchschnitte der vertikalen Trace der Ebene mit den Projectionen der äußersten Seiten des Kegels auf den zur Projections-Achse parallelen Durchmesser bringt. Denkt man sich nun durch beliebige Puncte der großen Achse des Schnittes Perpendikel auf dieselbe errichtet, so wird jedes derselben den Schnitt in zwey Punc-

ten treffen, und diese Perpendikel werden parallel zur horizontalen Trace der schneidenden Ebene seyn. Legt man ferner durch jedes dieser angenommenen Perpendikel eine zur Basis parallele Ebene, so geht jeder Punct des Schnittes durch den Durchgang der durch die erwähnten Puncte gelegten Seiten des Kegels mit dieser Ebene hervor. Man nehme mithin auf der großen Achse einen Punct und lege durch denselben (weil die vertikale Projection der großen Achse auch zugleich vermöge obiger Annahme die vertikale Projection der Ellipse selbst ist) eine Seite, und mittle sich deren horizontale und vertikale Projection aus, lege ferner durch eben diesen Punct eine Ebene parallel zur Basis des Kegels, und stelle diesen Schnitt hier einen Kreis in seiner horizontalen Projection dar; der Durchschnitt dieses Kreises mit der angenommenen Seite ist ein Punct der Ellipse; da es aber immer vier und vier Puncte in der Ellipse gibt, deren Ordinaten gleich sind, und nur in gleichen Abständen von der kleineren Achse dieß- und jenseits des Mittelpunctes derselben liegen, so läßt sich leicht die Construction ausführen. In Fig. 53 ist a, a′ der Scheitel des Kegels, ACB die schneidende Ebene, und DEFG die Basis des Kegels. Fig. 53.

Bey der früher gegebenen Constructions-Art ergeben sich die Achsen und die Projectionen derselben dadurch, daß man durch die Schwerpuncts-Linie des Kegels eine auf die schneidende Ebene perpendikuläre Ebene legt, die Durchschnitte der horizontalen Trace dieser Ebene mit der Basis des Kegels geben die Seiten desselben, deren Durchgänge mit der schneidenden Ebene Puncte einer der Achsen sind; legt man ferner durch den Mittelpunct des Schnittes oder durch den Durchgang der Schwerpuncts-Linie mit der schneidenden Ebene eine Parallele zur horizontalen Trace der parallelen Ebene, so geben die Durchschnitte ihrer horizontalen Projection mit der Basis des Kegels jene Seiten, de-

ren Durchgänge mit der schneidenden Ebene der anderen Achse angehören.

Sollte sich der Fall ergeben, daß bey einem Kegelschnitte die zur horizontalen Projections-Ebene parallelen Schnitte nicht Kreise werden, so kommt es wieder darauf an, ein solches System von schneidenden Hülfs-Ebenen zu wählen, daß in den Projectionen die Schnitte Kreise werden, oder die Projectionen der beyden Achsen auf einander senkrecht und gleich sind. Zu diesem Behufe lege man durch den Halbirungspunct der größeren Achse des Schnittes in seiner vertikalen Projection eine zur horizontalen Projection parallele Ebene, und bestimme sich die kleinere Achse dieses Schnittes in seinen Projectionen, trage diese auf den in der Horizontal-Ebene angenommenen Durchmesser; errichte nun in dem so auf den auf die horizontale Trace perpendikulären Durchmesser gefundenen Puncte ein Perpendikel, und bestimme sich den Durchschnitt dieses Perpendikels mit der halben größeren Achse des elliptischen Schnittes als Halbmesser aus dem Mittelpuncte der Ellipse. Legt man nun durch diesen Durchschnittspunct und durch die früher erwähnte Gerade eine Ebene, bestimmt deren Tracen, so erhält man das Verlangte; hier ist aber immer die Voraussetzung, daß die eine der Achsen der Basis des Kegels auf die horizontale Trace der schneidenden Ebene perpendikulär sey. Hier wurde dieses von der größeren Achse vorausgesetzt. Fig. 54 ist a, a′ der Scheitel des Kegels, ABCD die Basis, und A′C′B′ die schneidende Ebene.

Fig. 54.

Anmerkung. Viele Probleme, die noch zu construiren übrig bleiben, werden sich nach den aufgestellten Sätzen leicht lösen lassen, eines soll aber erwähnt werden; nähmlich wenn die Tracen einer Ebene gegeben sind, ferner auf dieser Ebene eine Gerade, und man soll die Tracen einer durch diese Gerade gehenden auf die erste Ebene perpendikulären Ebene bestimmen. Dafür nehme man in der gegebenen Geraden einen Punct und errichte durch denselben auf die Ebene ein Per-

pendikel; bestimme den horizontalen und vertikalen Durchgang desselben, ferner den vertikalen Durchgang der gegebenen Geraden; die beyden vertikalen Projectionen durch eine Gerade verbunden, geben die vertikale Trace der gesuchten Ebene, der Durchschnitt derselben mit der Projections-Achse mit dem horizontalen Durchgang der auf die gegebene Ebene perpendikulären Geraden verbunden, gibt die horizontale Trace, Fig. 55, wo ACB die Trace der gegebenen Fig. 55.
Ebene, ab, a′b′ die gegebene Gerade ist. Der früher erwähnte Durchschnitt eines Ellipsoides mit einer zur Rotations-Achse parallelen Ebene geschieht nach denselben Principien wie für den anderen Fall; und diese Aufgabe, ein Ellipsoid durch eine Ebene zu schneiden, findet ihre Anwendung beym Schatten eines Ellipsoides. Wenn der Schatten eines Ellipsoides gefunden werden soll, so kommt es nur darauf an, die Beleuchtungs-Curven auszumitteln. Man führe an das Ellipsoid, deren Generatrix gegeben ist, zwey tangirende Ebenen parallel zum Lichte, und bemerke die Projectionen der Berührungspuncte; führe nun parallel mit der tangirenden Ebene einen Schnitt des Ellipsoides, und führe an denselben den tangirenden Lichtstrahl; die durch diesen Berührungspunct und die früheren aus den tangirenden Ebenen hervorgegangene gelegte Ebene gibt die Beleuchtungs-Ellipse.

Um besser übersehen zu können, daß bey jedem Schatten zwey Hauptsachen zu berücksichtigen sind, nähmlich das Formelle und Essentielle, oder mit andern Worten, die Form des Schattens und die verschiedene Intensität desselben, so wollen wir schließlich ein Beyspiel aufstellen, bey welchem oberwähnte zwey Hauptsachen sehr auffallend dargestellt werden.

Man nehme einen auf einer horizontalen Ebene stehenden leeren gläsernen rechten Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, und er werde bey Lampenlicht (durch eine Kerze z. B.) beleuchtet; man führe nun durch den leuchtenden Punct an denselben zwey tangirende Ebenen, und mittele sich den Schatten der sich hieraus ergebenden Berührungskanten aus.

Man bestimme nun den Schatten von den obersten zwey concentrischen Begränzungskreisen, die um die Dicke des Glases von einander abstehen. Eine durch den leuchtenden gehende auf die horizontale Projections-Ebene perpendikuläre Ebene lasse man nun so bewegen, bis sie dieß- und jenseits von der Achse des Glases oder Cylinders aus, dasselbe von innen tangirt. Es ergibt sich auf diese Art, wenn ebenfalls der Schatten dieser Tangirungskante gesucht wird, ein auf beyden Seiten des Cylinders zwischen jeder dieser zwey Tangirungskanten enthaltener, doch ungleich intensiver Schatten. Da von der inneren bis zur äußeren Berührung der erwähnten Ebene und des Cylinders der Strahl seinen Weg durch eine verschieden lange Glasmasse nimmt, so muß offenbar der Schatten der inneren Berührungskante am schwächsten, und nach außen zu immer stärker werden; und es gilt überhaupt: Die Schatten aller jener Puncte des Glases sind schwächer, die im Glase einen längeren Weg zurücklegen. Betrachtet man den Theil des inneren und oberen Begränzungskreises, der dem leuchtenden Puncte zuliegt, und nicht auf die Horizontal-Ebene, sondern auf die innere entgegengesetzte Glasfläche Schatten wirft, so bildet sich dieser Schatten auf der Horizontal-Ebene dunkler dar, als der von dem äußeren Theil des oberen Kreises. Das höchste Licht würde in dem Durchschnitt der durch den leuchtenden Punct und die Achse gelegten vertikalen Ebene, mit der horizontalen Projections-Ebene liegen; doch würden nicht alle Theile dieses Durchschnittes gleich hell seyn; jene Theile werden heller erscheinen, die die Glasfläche nur ein Mahl treffen. Auf dem Glase selbst können im Allgemeinen zwey Glanzkanten, oder solche Kanten Statt haben, die alle auf den Durchschnitt der durch den leuchtenden Punct und die Achse gelegten Ebene mit dem Cylinder, sich absetzen, die eine an der äußeren, die andere auf der inneren Umfläche desselben. Die äußere ist durchgängig gleich hell,

die innere dort heller, wo die zugehörigen Strahlen durch kein Glas, oder durch dieses nur ein Mahl gehen. Die Fig. 56 zeigt dieses für Sonnenlicht, und Fig. 57 für Lampenlicht, wobey A die Conductrix des Cylinders, ABC die Generatrix, und a,a', ab, a'b' die Projectionen des Lichtes sind. Fig. 56. 57.

Eine schöne Anwendung der Ausbreitung wäre folgende:

Man denke sich zwey parallele horizontale Ebenen, die durch drey andere auf dieselben perpendikulären Ebenen so verbunden sind, daß dadurch ein von fünf Seitenflächen gebildetes Prisma entsteht; stelle sich nun vor, in dem hohlen Raume desselben stehe ein auf die horizontale Projections-Ebene perpendikulärer, aber über dieselbe erhabener Kreis, und derselbe werde durch eines durch seine Projectionen gegebenes Lampenlicht beleuchtet, und es sey dabey die Voraussetzung, daß dieser Kreis auf alle fünf Ebenen Schatten wirft; man soll nun auf dem Kreis früher ausmitteln, welche Puncte ihren Schatten auf die erste, zweyte, dritte u. s. w. Ebene absetzen, und da die oberwähnten Ebenen acht Durchschnittslinien (Kanten) bilden, so soll auch ein Mittel angegeben werden, wie jene Puncte auf dem Kreise zu finden seyen, die ihren Schatten in diese Durchschnittslinien absetzen, weil die Durchschnittspuncte mit den über diesen Puncten (Fixpuncten) geführten Strahlen und diesen Kanten jene sind, von denen der Schatten von einer Oberfläche oder von einer dieser Ebenen auf eine andere tritt.

Zu diesem Behufe lege man durch jede dieser Durchschnittslinien oder Kanten und dem leuchtenden Puncte, Ebenen, und bestimme die Durchschnitte dieser und der Ebene des Kreises; die Durchschnittspuncte dieser so erhaltenen Durchschnitte mit der Peripherie des Kreises geben jene Puncte im Kreise an, über welche Strahlen geführt, dieselben sich in der angenommenen Kante absetzen. Die

zwischen diesen zwey Puncten auf dem Kreise enthaltenen fallen dann auf die entsprechende Ebene. Es ist immer ein möglicher Fall, daß die zwischen diesen Fixpuncten enthaltenen Puncte des Kreises sich nicht auf dieselbe Ebene absetzen, sondern nur zum Theil, wie solches auch beym Schatten des Kreises auf dem Kegel der Fall war; dieses findet sich aber durch das Auffinden des Durchschnittes einer durch jene Kante einer Ebene und den leuchtenden Punct gelegten Ebene, die möglicher Weise den anderen Theil auffangen können, und der Ebene des Kreises.

Läßt man nun die vertikalen Ebenen um ihre horizontalen Tracen bewegen, bis sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfallen, und läßt man die obere horizontale Ebene um einen ihrer Durchschnitte mit den vertikalen Ebenen ein Mahl so bewegen, daß sie vertikal wird, und dann in dieser Lage mit der zugehörigen vertikalen Ebene mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfallen, so ergibt sich die Ausbreitung des Schattens.

Das Auffinden des Schattens selbst unterliegt keinen Schwierigkeiten, da, wenn der Durchgang eines Strahles mit einer der Ebenen gefunden ist, man nur durch diesen ein Perpendikel auf die horizontale Projections-Ebene fällen darf, und der Durchschnitt desselben mit der horizontalen Trace der den Schatten aufgefangenen Ebene auf diese Trace ein Perpendikel, gleich der vertikalen Projection des erwähnten Durchgangspunctes, errichtet, gibt die-
Fig. 58. sen Schattenpunct in der Ausbreitung. In der Fig. 58 ist abcd der umgelegte Kreis.

Anmerkung. Man denke sich eine Oberfläche, welche die Eigenschaft hat, daß jede an sie geführte tangirende Ebene dieselbe in einem Puncte berührt, z. B. eine Kugel, und daß dieselbe beleuchtet werde, so wird es Strahlen geben, welche dieselbe berühren, und die Berührungspuncte sind die Beleuchtungspuncte, zum Unterschiede von den

Glanzpuncten; diese entstehen dadurch, wie auch aus Früherem schon zu ersehen, daß der einfallende Strahl schon selbst perpendikulär auf die Oberfläche ist; bey einer Kugel wäre es der, der verlängert durch den Mittelpunct ginge.

Nimmt man aber eine solche Oberfläche, bey der eine an sie geführte tangirende Ebene mit derselben eine Linie gemein hat, oder daß die Berührung beyder nach einer Generatrix der Oberfläche geschieht, z. B. eine rechte cylindrische Oberfläche, wobey die Generatrix perpendikulär auf die horizontale Projections-Ebene ist, so geben die beyden zum Lichte parallelen tangirenden Ebenen die so genannten Beleuchtungskanten; die Glanzkante bey dieser Oberfläche ist dann diejenige, die das auf die Oberfläche perpendikuläre Licht enthält, das heißt mit andern Worten: Man führt auf die beyden tangirenden eine perpendikuläre, die Oberfläche tangirende Ebene, und die hieraus sich ergebende Berührungskante ist die Glanzkante.

Legt man nun durch diese eine zu der tangirenden Ebene parallele Ebene, so geht sie verlängert durch die Achse des Cylinders, und die Strahlen die in dieser Ebene liegen, bilden auf der Oberfläche das höchste Licht, und da die Lichtstrahlen meist schief auf diese Kanten fallen, so trägt es zur Helligkeit doch nichts bey, ob sie so oder perpendikulär auffielen (dieß letztere gilt auch für Lampenlicht): dieses hat auch für Sonnenbeleuchtung Statt; geschähe die Beleuchtung bey Lampenlicht, so würde man durch den leuchtenden Punct und die Achse der Oberfläche eine Ebene legen, und den Durchschnitt dieser mit der Oberfläche suchen, welcher die Glanzkante wäre.

Also sowohl Glanz- als Beleuchtungskanten gehen durch die Einführung tangirender Ebenen hervor, und jede Glanzkante ist eine Beleuchtungskante, und erstere unterscheidet sich von letzterer nur durch die Helle des Lichtes, ferner daß an letzterer die Oberfläche durch die Strahlen berührt, an ersterer aber durch dieselben getroffen wird, und daß sie in diesem Falle durch die Oberfläche durchgehen würden.

III.

Perspectiv.

Man denke sich irgend einen Gegenstand und das Auge in irgend einer Entfernung und Höhe über der Horizontal- oder Grundebene; führt man durch das Auge nach den sichtbaren Theilen desselben, so wie nach dessen sichtbarem Schatten und Beleuchtungsgränze, Strahlen, so bilden die sichtbaren Theile zusammen die sichtbare Contur des Gegenstandes. Die Darstellung eines Gegenstandes, wie er unter irgend einer Annahme des Auges demselben erscheint, heißt perspectivische; um diese zu erhalten, denkt man sich den Strahlenkegel, dessen Scheitel das Auge und dessen Basis die sichtbare Contur ist, durch irgend eine Oberfläche geschnitten; der Durchschnitt dieses Kegels mit der erwähnten Oberfläche ist das Perspectiv. Die zweyte angenommene Oberfläche ist gemeiniglich eine Ebene, könnte aber jede andere seyn, und die Construction wäre dann nach den früher aufgestellten Sätzen auszuführen. Bey diesen Untersuchungen werden folgende Gegenstände abgehandelt:

a) Bestimmung des Perspectivs, wobey die zweyte Oberfläche, die Tafel genannt, eine Ebene, und perpendikulär auf die horizontale Projections- oder Grundebene ist.

b) Wenn die Tafel schief stände.

c) Construction des perspectivischen Schattens für Sonnen- und Lampen-Beleuchtung.

d) Constructionen im Perspectiv, und als Beyspiel: Durchdringung zweyer Cylinder.
e) Abspieglung im Wasser.
f) Reflectirtes Licht sammt Beyspiel.

Denkt man sich durch das Auge eine zur Grundebene parallele Ebene, so entsteht auf der Tafel ein Durchschnitt, dieser heißt **Horizont**, und der Durchschnitt der Tafel mit der Grundebene oder der durch den Fuß des Auges gelegten Horizontal-Ebene heißt **Grundlinie**. Der Horizont werde immer durch BB′, und die Grundlinie immer durch CC′, das Auge durch O, O′ bezeichnet. Es kommt nun darauf an, ein Mittel zu haben, das Perspectiv von Puncten zu erhalten. Ist die horizontale und vertikale Projection des Auges, sind ferner die Tracen der Tafel und die Projectionen der in das Perspectiv zu setzenden Puncte gegeben, so, um das Perspectiv eines dieser Puncte zu erhalten, denke man sich aus dem Auge nach diesem Puncte einen Sehstrahl; die Projectionen desselben werden erhalten, wenn man die respectiven Projectionen des Auges mit denen des gegebenen Punctes durch Gerade verbindet, und es dürften nur die Projectionen des Durchganges des Sehstrahles mit der Tafel gesucht werden, und sie wären die Projectionen des Perspectives des gegebenen Punctes. Man wird auch leicht übersehen, daß wenn die Tafel perpendikulär auf beyde Projections-Ebenen angenommen wird, die Sache sich vereinfacht, indem die Projectionen des Perspectivs in einer auf die Projections-Achse perpendikulären Geraden liegen, welche zugleich die beyden Tracen der Ebene der Tafel vorstellen. Um aber das perspectivische Bild selbst zu erhalten, lasse man die Tafel um ihre vertikale Trace bewegen, bis sie mit der vertikalen Projections-Ebene zusammenfällt; bey dieser Bewegung beschreibt die vertikale Projection eines jeden perspectivischen Punctes einen Qua-

dranten, und es läßt sich der perspectivische Ort eines jeden Punctes durch seine Coordinaten bestimmen. Diese Methode ist die allgemeine, und für sehr kleine Gegenstände sehr brauchbar, da jedes Perspectiv durch den rechtwinkeligen Durch-
Fig. 59. schnitt zweyer Coordinaten hervorgeht, Fig. 59, wo ABC die Tafel, a, a′ der gegebene in das Perspectiv zu setzende Punct ist.

Wir wollen nun durch das Auge zwey beliebige Linien legen, die eine Gerade heiße A, die andere A′, und bemerke deren Durchgänge mit der Tafel; wie diese Linien am brauchbarsten für die Ausübung gewählt werden müssen, soll später betrachtet werden; man lege ebenfalls durch den in das Perspectiv zu setzenden Punct zwey Linien B und B′ respective parallel zu A und A′, und bemerke auch ihre Durchgänge mit der Ebene der Tafel. Es läßt sich nun durch A und B und durch A′ und B′ eine Ebene legen; diese beyden Ebenen schneiden offenbar die Tafel nach zwey Geraden, welche gefunden werden, wenn man die Durchgänge von A und B, A′ und B′ mit der Tafel, durch gerade Linien verbindet. Jeder dieser Durchschnitte ist das Perspectiv der durch den gegebenen Punct gelegten Geraden, und ihr Durch-
Fig. 60. schnitt selbst das des gegebenen Punctes. Fig. 60.

Dieses müßte nun für jeden Punct gemacht werden, und man wird leicht übersehen, daß es am zweckmäßigsten wäre, wenn die durch das Auge gelegten Geraden in einer Horizontal-Ebene lägen, und zwar die eine perpendikulär auf die Tafel, die andere unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt. Um nach dieser Annahme das Perspectiv eines Punctes zu erhalten, darf man nur durch den in das Perspectiv zu setzenden Punct auf die Tafel eine Perpendikuläre führen, und diesen Abstand auf eine durch den Begegnungspunct gehende in der Ebene der Tafel liegende Horizontale tragen. Der Durchgang des durch das Auge auf die Tafel gefällten Perpendikels heißt der Augpunct, und der Durchgang der zweyten durch das Auge gelegten

Geraden mit der Tafel heißt Begegnungspunct, deren auch mehrere seyn können und durch B, B′ bezeichnet werden. Verbindet man nun den Augepunct mit dem Durchgangspuncte des aus dem gegebenen Puncte auf die Tafel gefällten Perpendikels, ferner den Begegnungspunct mit dem Endpuncte der erwähnten Horizontalen, so gibt der Durchschnitt dieser zwey Geraden das Perspectiv des gegebenen Punctes. Betrachtet man in der Horizontal-Ebene das rechtwinkelige Dreyeck, dessen eine Kathete die Entfernung des Auges vom Augepuncte, dessen Hypothenuse die des Auges vom Begegnungspuncte, und dessen andere Kathete die Entfernung des Augepunctes vom Begegnungspuncte ist, so ist dieses Dreyeck gleichschenkelig, und darauf gründet es sich, daß es gleichgültig ist, ob man durch den in das Perspectiv zu setzenden Punct eine Parallele zu der zweyten durch das Auge gelegten Geraden legt, oder gleich den Abstand des gegebenen Punctes von der Tafel auf die erwähnte Horizontale trägt; nur muß jedes Mahl bemerkt werden, daß die Durchgänge für jeden Punct auf der Tafel in einem Abstande von der Grundebene geschehen, der gleich dem des gegebenen Punctes über dieselbe ist, Fig. 61, wo a, a′ der gegebene Punct ist. So müßte von Punct zu Punct des Gegenstandes übergegangen werden, welches mühsam wäre. Man nehme mehrere parallele Linien, sie mögen welche Neigung sie wollen gegen die Grundebene haben, und lege durch das Auge zu diesen eine parallele Gerade, und bemerke deren Durchgänge mit der Tafel; man lege nun durch die einzelnen gegebenen parallelen Geraden und durch die durch das Auge zu ihnen parallel geführte, successiv Ebenen, so übersieht man, daß diese Ebenen die Tafel nach Linien schneiden, die sich alle in dem Begegnungspuncte der durch das Auge gelegten geraden Linie mit der Tafel, schneiden, und daraus folgt der wichtige Satz: »Die Perspectiven paralleler Linien schneiden sich in einem und dem-

Fig. 61.

»selben Puncte, der erhalten wird, wenn man durch das »Auge zu dem gegebenen Systeme paralleler Linien eine Pa»rallele legt, und ihren Durchgang mit der Tafel, oder dem »Begegnungspuncte sucht.« Ist daher ein Gegenstand durch seine beyden Projectionen gegeben, ferner auch die Lage der Tafel und die des Auges, so, wenn der Gegenstand in das Perspectiv gesetzt werden soll, ist das erste auszumitteln, wie viel Gattungen paralleler Linien vorhanden sind; so viele deren sind, so viele Begegnungspuncte haben Statt, und wohl ist zu bemerken, daß die Begegnungspuncte jener Linien nur, die parallel zur Grundebene liegen, ihren Begegnungspunct im Horizont oder im Durchschnitte der Tafel mit der durch das Auge auf sie gelegten perpendikulären zur Grundebene parallelen Ebene haben. Die Begegnungspuncte werden also dazu dienen, um die Perspectiven von den Linien als den Puncten sowohl zu bestimmen. Bequemer ist es aber, die Perspectiven von Puncten durch den Augepunct und einen der Begegnungspuncte zu bestimmen, weil die Durchschnitte nicht so schief werden. Es wird auch klar, daß alle jene Linien, die mit der Tafel parallel sind, ihre Begegnungspuncte in unendlicher Entfernung haben, oder daß die Perspectiven von mit der Tafel parallelen Linien unter sich parallel sind. Soll mithin das Perspectiv eines Punctes von einem System paralleler Linien gefunden werden, so ist das erste durch das Auge auf die Tafel ein Perpendikel zu fällen, und die Entfernung des Durchganges desselben von dem Durchschnitte der Tafel und der Grundebene ist die Höhe des Auges; man führe durch den Endpunct derselben eine Parallele zur Grundebene, diese ist der sogenannte Horizont oder der Durchschnitt der Tafel mit der durch das Auge zur Grundebene parallel gelegten Ebene. Man lege nun durch das Auge so viele Linien, als es verschiedene Systeme paralleler Linien gibt, und jene zu diesen Systemen respective parallel, und bestimme die Durchgänge derselben mit der Tafel, welches durch die gegebenen horizontalen und

vertikalen Projectionen des Gegenstandes geschehen kann. Man bestimme sich ferner das Perspectiv der Linien, und zwar auf folgende Art: Man denke sich die Linie des Gegenstandes bis an die Tafel verlängert, und bestimme ihren Durchgang mit derselben, diesen verbinde man mit dem zugehörigen Begegnungspuncte durch eine Gerade, so ist diese das unbegränzte Perspectiv der Linie; sollen nun die Perspectiven von in ihr liegenden Puncten gefunden werden, so fälle man von denselben auf die Tafel Perpendikel, und verbinde die Durchgänge derselben mit dem Augepuncte durch eine Gerade: die Durchschnitte dieser mit der früheren geben die Perspectiven dieser Puncte. Noch für die Anwendung wichtig ist der Fall, wenn die Perspectiven von Linien gefunden werden sollen, die perpendikulär auf die Tafel stehen; diese haben ihren Begegnungspunct im Augepuncte, und um die Perspectiven von in ihnen liegenden Puncten zu erhalten, muß ein anderer Begegnungspunct gewählt werden. Jene Linien aber, die perpendikulär auf die Grundebene stehen, sind im Perspectiv auf die Grundlinie perpendikulär, und jene die in einer zur Tafel parallelen Ebene liegen, haben ihren Begegnungspunct in unendlicher Entfernung; ist die Linie parallel zur Tafel und Grundebene, so ist ihr Perspectiv parallel zum Horizont. In der Fig. 62 ist ein Würfel in das Perspectiv zu setzen, gewählt worden, dessen Höhe AA′, und horizonale Projection die eine seiner Flächen parallel mit der Grundebene angenommen wurde, BCDE ist. Fig. 61.

Wäre die Tafel schief, so dürften nur die Durchgänge der durch das Auge gelegten Geraden mit derselben gesucht werden, und dann die Tafel eben so wie früher bey der ersten Annahme derselben, sich um die Grundlinie bewegen, bis sie mit der Grundebene zusammenfiele. Für jeden Punct auf der Tafel müßten ferner noch die Coordinaten bestimmt werden, um die wahre Größe des perspectivischen Bildes zu erhalten, oder mit andern Worten, es käme darauf an, die

Größe und Form eines Schnittes in seiner Ebene darzustellen. Diese nun angeführte Methode, einen Gegenstand in das Perspectiv zu setzen, setzt die horizontale und vertikale Projection des Gegenstandes voraus; es kommt hier noch zu zeigen, auf welche Art die Größe eines perspectivischen Bildes erreicht werde. Man wird leicht übersehen, daß wenn die Lage des Auges und Gegenstandes gegeben ist, die Größe des perspectivischen Bildes durch die Stellung der Tafel vor oder hinter dem Gegenstande erreicht wird. Man nehme nun zwey beliebige Geraden des Gegenstandes, der Bequemlichkeit wegen zwey Perpendikuläre, und bedinge sich, wie groß diese beyden im Perspectiv erscheinen sollen. Man denke sich aus dem Auge nach dem einen dieser Perpendikel zwey Sehstrahlen nach den Endpuncten derselben, und suche in dem einen dieser Sehstrahlen denjenigen Punct, von welchem eine Parallele zum angenommenen Perpendikel gezogen, dieselbe die bedingte Größe habe; bemerke sich zugleich den Durchgangspunct dieser Parallelen und der Grundebene; dieser Durchgangspunct ist ein Punct der horizontalen Trace der Tafel, und die Entfernung desselben von dem Fuß oder der horizontalen Projection des Auges wird aus eben dieser Projection auf die von der horizontalen Projection des Auges nach eben der des gegebenen Perpendikels geführten Geraden aufgetragen; eben so bestimmt man sich einen zweyten derselben, und erhält mithin die Lage der Tafel. Soll das perspectivische Bild größer werden als der Gegenstand, so stelle man denselben vor, im entgegengesetzten Falle hinter die Tafel. Ist die Tafel und die Lage des Auges bedingt, so könnte eben so leicht bey einer gegebenen Größe des perspectivischen Bildes, die Größe und
Fig. 63. Lage des Gegenstandes ausgemittelt werden, Fig. 63, wo ab, und a′b′ die gegebene Ebene sind, die im Perspectiv die Größe AB und A′B′ erhalten sollen.

Wie schon früher erwähnt, gehört zum perspectivischen

Bilde auch aller Schatten, der unter irgend einer Beleuchtung vom Gegenstande sowohl auf die Grundebene als auch auf Theile des Gegenstandes selbst fällt. Wir suchen zuerst die Construction des perspectivischen Schattens beym Sonnenlicht. Aus Früherem weiß man, daß es bloß darauf ankommt, die Durchgänge der Strahlen mit irgend einer Oberfläche zu finden. Da bey Sonnenlicht die Strahlen alle unter sich parallel sind, mithin sowohl in der horizontalen als vertikalen Projection des Gegenstandes ein System paralleler Linien Statt findet, nähmlich die horizontalen und vertikalen Projectionen der Lichtstrahlen, so lege man durch das Auge eine Parallele zum Lichtstrahle, und bestimme dessen Durchgang in der Tafel. Dieser Durchgangspunct kann ober- oder unterhalb des Horizontes liegen, nie aber im Horizonte selbst: denn in diesem Falle würde das Licht parallel zur Grundebene seyn, und keinen eigentlichen begränzten Schatten verursachen. Der so erhaltene Durchgangspunct ist der Begegnungspunct aller Lichtstrahlen der vertikalen Projection; führt man durch ihn ein Perpendikel auf den Horizont, so ist der Durchschnittspunct desselben mit dem Perpendikel der Begegnungspunct der horizontalen Projectionen aller Lichtstrahlen; denn legt man zu den horizontalen Projectionen der Lichtstrahlen durch das Auge eine Parallele, so trifft sie den Horizont. Diese zwey Begegnungspuncte, nähmlich der des vertikalen und der des horizontalen Lichtes, dienen nun den Schatten des Gegenstandes zu construiren. Daher, um von irgend einem Puncte den Schatten zu finden, oder mit andern Worten, den Durchgang eines durch diesen Punct gelegten Lichtstrahles mit der Horizontal-Ebene im Perspectiv zu erhalten, untersuche man früher, ob der Punct auf der Grundebene oder über derselben liegt; ist letzteres der Fall, so mittele man sich dessen Perspectiv aus, als ob er auf der Grundebene wäre, oder mit andern Worten, suche sich das Perspectiv der horizontalen Projection desselben,

welches immer sehr leicht dadurch geschieht, daß man von der horizontalen Projection des gegebenen Punctes ein Perpendikel auf die Tafel fällt, und den Fußpunct desselben mit dem Augepuncte verbindet, und den Durchschnitt der so erhaltenen Geraden mit dem Perspectiv der durch diesen Punct gehenden Vertikalen bestimmt, der dann das Perspectiv der horizontalen Projection des erwähnten Punctes ist. Zieht man nun von dem Perspectiv der horizontalen Projection des Punctes nach dem horizontalen Begegnungspuncte des Lichtes eine Gerade, so ist diese das Perspectiv der horizontalen Projection des über den gegebenen Punct gezogenen Lichtstrahles. Führt man nun durch das Perspectiv des schattenwerfenden Punctes, deren perspectivische horizontale Projection die erwähnte ist, nach dem vertikalen Begegnungspuncte des Lichtes eine Gerade, und bestimmt den Durchschnitt dieser mit der früher gezogenen, so gibt dieser Durchschnitt das Verlangte; eben so ließe sich der Schatten einer Linie finden, man dürfte nur durch die Perspectiven der Endpuncte der so gegebenen Geraden nach dem vertikalen Begegnungspuncte des Lichtes Linien führen, die Durchschnitte dieser respective mit denen die aus den Perspectiven der horizontalen Projectionen der Endpuncte dieser Linie nach dem horizontalen Begegnungspuncte des Lichtes geführt wurden, gäben, durch eine Gerade verbunden, den Schatten der gegebenen Geraden. Linien, die parallel zur Horizontal-Ebene sind, haben auch ihren Schatten mit ihnen parallel, und das Perspectiv des Schattens einer solchen Linie schneidet sich in demselben Begegnungspuncte der Linie; wenn der Schatten eines Punctes, einer Linie zu finden ist, um dessen Begränzung zu finden, oder auch wenn die Richtung des unbegränzten Schattens gegeben ist, davon darf dieselbe nur durch Gerade, die über den Endpunct des Körpers in den vertikalen Begegnungspunct des Lichtes, oder durch eine Gerade, die über

das Perspectiv der horizontalen Projection des Punctes nach dem Begegnungspuncte des horizontalen Lichtes geht, abgeschnitten werden. Fig. 64 wurde dazu gewählt, es stellt die Construction des perspectivischen Schattens eines Würfels vor, wobey aa′, bb′ das Licht ist. Um auszumitteln, ob der Schatten eines Theiles des Gegenstandes von einem anderen Theil desselben aufgefangen wird, hat man sich nach den früher gegebenen Regeln zu halten. Die Beleuchtung bey Lampenlicht geschieht nach denselben Grundsätzen; man bestimme sich das Perspectiv des Fußpunctes des leuchtenden Punctes, und des leuchtenden Punctes. Führe von dem Perspectiv des Fußpunctes des leuchtenden Punctes Gerade nach den Perspectiven der horizontalen Projectionen der schattenwerfenden Puncte, und suche die Durchschnitte dieser mit jenen, die vom Perspectiv des leuchtenden Punctes über die Perspectiven der Gegenstandspuncte geführt wurden. Hier tritt aber eben so, wie bey Sonnen-Beleuchtung, der Fall ein, daß der Schatten einer Kante parallel mit ihr, oder parallel mit mehreren anderen Kanten ist, daher auch hierbey die ursprünglichen Begegnungspuncte der Perspectiven von Gegenstandslinien *) mit zur Schatten-

Fig. 64.

---

*) Wenn man was immer für ein oder mehrere parallele Systeme gerader Linien hat, und werden dieselbe durch Sonnen- oder Lampenlicht beleuchtet, so werden die Schatten dieser Systemskanten für Sonnenbeleuchtung immer, für Lampenbeleuchtung aber nur in besonderen Fällen (z. B. bey den mit der Horizontal-Ebene parallelen Seiten eines Parallelepipedes, dessen beyde Grundflächen auch mit ihr parallel sind) auch unter sich parallel seyn, und es kann daher im Perspectiv oft von Abkürzung der Arbeit seyn, sich für diese Schattenkanten einen eigenen Begegnungspunct auszumitteln, der auf folgende Art gefunden wird:

Man lege parallel zum Licht (für Sonnen-Beleuchtung) eine zu einer der Gegenstandskanten parallele Ebene, und bemerke ihren Durchschnitt mit der Grundebene. Legt man nun

Construction so oft benützt werden können. Es besteht also die perspectivische Schatten-Construction darin, daß man durch die Perspectiven der horizontalen Projectionen Geraden nach dem horizontalen Begegnungspuncte des Lichtes führt, welches derjenige Punct ist, in dem sich die Perspectiven der horizontalen Projectionen der Lichtstrahlen schneiden, und diese Geraden durch andere schneidet, welche über die Gränzpuncte der schattenwerfenden Contur nach dem Begegnungspuncte des vertikalen Lichtes, oder desjenigen Punctes, in welchem sich die vertikalen Projectionen des Lichtes treffen, geführt werden. Es setzt dieses, wie natürlich, die Projectionen des Lichtes in Bezug auf die Tafel als bekannt voraus. In Ansehung des Schattirens ist sich nach

---

durch das Auge zu diesem Durchschnitt eine Parallele, und bestimmt den Begegnungspunct davon, so werden sich in demselben alle Schatten dieser Kanten schneiden.

Ist ein System paralleler Linien bey Lampenlicht beleuchtet, so werden sich die Schatten davon auch in einem Puncte schneiden, diesen zu finden verfahre man auf folgende Art:

Man lege durch den leuchtenden Punct und zwey dieser unter sich parallelen Linien eine Ebene, so werden die horizontalen Tracen dieser beyden Ebenen (da immer, wie schon zu ersehen ist, sowohl die Grundebene als die Tafel als die beyden Projections-Ebenen angesehen werden können), sich in einen Punct schneiden, und eben so müssen auch die horizontalen Tracen aller anderen so gelegten Ebenen sich in denselben Punct schneiden; man setze nun den so erhaltenen Durchschnittspunct beyder Tracen in das Perspectiv, und es werden die Perspectiven aller dieser paralleler Linien sich in diesen Punct schneiden. Solcher Puncte im Perspectiv kann man so viele annehmen, als es Systeme von parallelen Linien gibt, und man wird leicht übersehen, daß auf diese Art, wenn diese Systeme paralleler Linien ein Ganzes bilden, daß wenn man z. B. annimmt, daß zwey Linien von zweyen dieser Systemen sich schneiden, das Perspectiv des Durchschnittspunctes, durch den Durchschnitt der Perspectiven beyder Linien hervortritt.

den früher gegebenen Anhaltspuncten zu halten; nähmlich diejenigen Schattenpartien stärker, die dem Auge näher sind und eben so jene Lichtpartien greller, die vom Auge weniger abstehen. Als Beyspiel für Beleuchtung beym Lampenlicht ist ebenfalls ein Würfel gewählt worden, Fig. 65, wo a, a' der leuchtende Punct ist. Wird der Schatten eines Gegenstandes von einem andern Körper als der horizontalen Projections-Ebene aufgefangen, so ist sich bey Construction des perspectivischen Schattens nach den allgemeinen Regeln zu halten; das Bequemste ist, auch hier den Durchschnitt der Schatten beyder Oberflächen auf der Horizontal-Ebene auszumitteln, und die Durchschnitte an die zugehörigen Stellen zu bringen. Fig. 66 liefert ein Beyspiel, worin ein Prisma auf ein anderes bey Sonnen-Beleuchtung Schatten wirft. Fig. 65. Fig. 66.

Wenn im Perspectiv Constructionen von Durchdringungen von Oberflächen gemacht werden, so kommt es darauf an, wie viel Gattungen Constructions-Linien, die der Neigung gegen die Projections-Ebenen nach verschieden sind, eingeführt werden müssen; so viel deren Systeme sind, eben so viele Begegnungspuncte werden eingeführt; die übrige Construction ist eben so als ob dieselbe rein geometrisch gemacht würde, nur daß man sich bey dieser paralleler, bey jener nach einem Puncte zu laufender Geraden bedient. Als Beyspiel sollen hier zwey Cylinder sich durchdringen, man soll deren Schnitt und Schatten construiren; das erste wird seyn, sich die Begegnungspuncte der Generatrixen beyder Cylinder zu bestimmen. Und da die Grundebene und die Tafel als die beyden Projections-Ebenen angesehen werden können, so bestimme man sich noch die Begegnungspuncte der horizontalen Tracen derjenigen Ebene, die, wie aus der geometrischen Construction dieses Durchschnittes erhellet, dazu dienen, durch ihre Durchschnitte mit den Conductrixen beyder Cylinder, die ebenfalls im

Perspectiv dargestellt sind, diejenigen Seiten beyder Cy-
Fig. 67. linder anzugeben, die sich respective schneiden. Fig. 67.

Gegenstände, die an glänzenden Oberflächen stehen, wie z. B. an Wässern, spiegeln sich in denselben ab, und diese Abspiegelung läßt sich auch sehr leicht im Perspectiv finden, man dürfte nur die Wasserfläche als Grundebene ansehen, und das Perspectiv eines jeden Punctes auf der durch diesen Punct auf die Wasserfläche errichteten Perpen-
Fig. 68. dikulären nach abwärts tragen, Fig. 68, wo ein Würfel am Ufer steht.

Nicht unwichtig ist es, Gegenstände im Perspectiv darzustellen, die durch Spiegel gesehen werden. Man erinnere sich hierbey nur des Satzes aus der Physik: »daß jeder Gegenstand hinter dem Spiegel eben so weit erscheint, als er vor demselben ist;« man stelle sich daher den Gegenstand in der nöthigen Entfernung, und suche das Perspec-
Fig. 69. tiv davon. Soll, wie Fig. 69 zeigt, das Perspectiv eines Würfels, der sich in einem Spiegel darstellt, gezeichnet werden, so bringe man alle Puncte des Würfels, die sich in dem Spiegel zeigen, in derselben Entfernung hinter den Spiegel, die sie vor dem Spiegel haben (mit gehöriger Berücksichtigung der Dicke des Spiegels), und suche nun von den so erhaltenen rückwärts getragenen Puncten die Perspective. Das Rückwärtstragen der Puncte geschieht durch Perpendikel auf die Ebene des Spiegels. Wäre der Spiegel geneigt, so müßten durch die vor dem Spiegel gegebenen Puncte, Perpendikel ebenfalls gefällt werden, und die Entfernungen oder Größen dieser Perpendikel vom Durchgangspuncte derselben mit der Tafel rückwärts getragen werden.

Wenn Licht auf einen Spiegel fällt, so wird dasselbe unter seinem Einfallswinkel zurückgeworfen, und diese reflectirten Strahlen werden sich auf irgend einer Oberfläche, z. B. auf der Horizontal-Ebene absetzen; so wird auf dieser Ebene ein Raum erscheinen, der beleuchtet und der Form

des Spiegels ähnlich ist; die Gränzen dieses Raumes werden durch die Durchgänge der reflectirten Strahlen und der Horizontal-Ebene aufgefunden, Fig. 70, wo ab die horizontale Projection des Spiegels, und a,a' den leuchtenden Punct bedeutet. Fig. 70.

Die Annahme des Auges bey Perspectiven, um ein schönes Bild zu erhalten, das heißt, um eine allmähliche nicht jähe Abnahme der Verkleinerung entfernterer Gegenstände hervorzubringen, ist nicht beliebig. Dafür muß immer das Auge ziemlich weit vom Gegenstande, in der Mitte des Gegenstandes und in einer Höhe über den Horizont angenommen werden, die gleich der halben Höhe des Gegenstandes ist. Auch machen sich Perspective gut, wenn man die Tafel an den Gegenstand oder in denselben hineinlegt; dann werden die mit der Tafel gemeinschaftlichen Puncte des Gegenstandes rein geometrisch erscheinen; vorzüglich Architectur-Zeichnungen erscheinen sehr gut, wenn ein Theil derselben rein geometrisch, der andere perspectivisch sich darstellt. Oft machen Umstände nöthig, wenn es sich z. B. handelt, gewisse Theile eines Gegenstandes zu sehen, von den eben aufgestellten Regeln für die Schönheit des Perspectives, davon abzugehen.

Anmerkung. Denkt man sich durch das Auge und jeden in das Perspectiv zu setzenden Punct eine auf die Grundebene perpendikuläre Ebene, so liegt auch der durch das Auge nach diesem gezogene Strahl ebenfalls in dieser Ebene; diese Ebene schneidet die Tafel in einer auf die Grundlinie perpendikulären Geraden, und wird gefunden, wenn man durch den Fuß des Auges und die horizontale Projection des Punctes eine Gerade bis in den Durchschnitt mit der Grundlinie führt, und in dieser ein Perpendikel auf die Grundlinie zieht. In dieser Perpendikulären liegt offenbar das Perspectiv des Punctes, welches jetzt sehr einfach dadurch hervorgehen kann, daß man durch den gegebenen Punct ein Perpendikel auf die Tafel fällt; der Durchgangspunct desselben, mit dem Augepuncte verbunden, gibt eine Gerade, in deren Durchschnitt mit dem früher gezogenen Perpendikel das Perspectiv des gegebenen

Fig. 71. Punctes liegt. Fig. 71. Aus diesem folgt nun auch, daß die Gränzen eines Perspectives dadurch erhalten werden, daß man durch das Auge und die Gränzen der horizontalen Projection des Gegenstandes zwey auf die Grundebene perpendikuläre Ebenen legt; es bildet sich auf diese Art in der Grundebene ein Winkel, dessen Scheitel der Fuß oder die horizontale Projection des Auges, und dessen Schenkel die horizontalen Tracen der erwähnten Ebenen sind; jede zwischen diesen zwey Schenkeln gezogene Gerade kann die horizontale Trace der Tafel oder die Grundlinie vorstellen, und man übersieht leicht, daß man die Größe des Perspectives durch die Annahme dieser dritten Geraden ganz in seiner Willkür hat. Fig. 72.
Fig 72.

Sollen krumme Oberflächen, z. B. eine Kugel, in das Perspectiv gesetzt werden, so ist die Verfahrungsart dieselbe, als ob der Schatten derselben auf der Tafel beym Lampenlicht gefunden werden sollte, wobey das Auge der leuchtende Punct ist, und die Tafel die den Schatten auffangende Oberfläche. Geschieht die Beleuchtung der Kugel beym Lampenlicht, so mittle man sich zuerst den schattenwerfenden Kreis aus, suche dessen Perspectiv, und construire nun, nachdem das Perspectiv des leuchtenden Punctes sowohl als das seiner horizontalen Projection bestimmt ist, den Schatten des Kreises im Perspectiv. Für Sonnen-Beleuchtung gilt dasselbe Verfahren. Wenn krumme Linien in das Perspectiv gesetzt werden sollen, so, statt daß man von Punct zu Punct der Curve geht, und dieselben successive in das Perspectiv setzt, kann man sich die Curve durch ein System paralleler Linien geschnitten vorstellen. Sucht man die Perspectiven dieser Parallelen und bestimmt auf denselben die Perspectiven der Durchschnitte der angenommenen Parallelen und der Curve, so erhält man sehr leicht das Gesuchte.

In diesem Falle führt man einen Durchmesser, und in gleichen Abständen dieß- und jenseits derselben parallele Sehnen; verbindet man nun die Endpuncte der gleichen Sehnen durch gerade Linien, welche auf das erste Sehnen-System perpendikulär stehen, so mittle man sich die Begegnungspuncte dieser beyden Sehnen-Systeme aus, und es geht mithin das Perspectiv jedes Punctes des Kreises durch den Durchschnitt der Perspectiven der respectiven zu diesem Puncte gehörenden Sehnen, hervor.

IV.

Von den in Maschinenzeichnungen nöthigen Constructionen, dem Behandeln jener, und der Aufnahme von Maschinen.

Wenn die beyden Projections-Ebenen perpendikulär aufeinander angenommen werden, so verschafft die Zeichnung eines Gegenstandes dadurch construirt den Vortheil, daß alle Ausmessungen der Zeichnung den entsprechenden des Gegenstandes gleich sind; und zwar wenn die Unterflächen des Gegenstandes mit der Horizontal-Ebene parallel, und die Vertikal-Flächen auf die Horizontal-Ebene perpendikulär sind. Vermöge dieser Projections-Art erhält man aber doch keine vollständige Übersicht über das Ineinandergreifen der einzelnen Theile des Gegenstandes. Das Perspectiv eines Gegenstandes verschafft wohl diesen Vortheil, jedoch sind die Demensionen der darin vorhandenen Theile nicht gleich denen der respectiven in der Natur. Also weder die geometrische noch die perspectivische Projection leisten die beyden Forderungen: »daß die Dimensionen der »Zeichnungstheile gleich oder vielmehr ähnlich sind den ho»mogenen des Gegenstandes, und daß zugleich die Zeich»nung ein vollständiges Bild des Gegenstandes gäbe.«

Zwar könnte man entweder die Projections-Ebenen schief gegen einander, oder die Flächen des Gegenstandes schief gegen die Projections-Ebenen annehmen, so erhielte man wohl eine bessere Übersicht des Gegenstandes, doch sind

die Dimensionen der Theile des Gegenstandes in der Zeichnung nicht mehr ähnlich den homogenen des Gegenstandes, sondern verkürzen oder verlängern sich; auch könnte man die Projections-Ebenen unter sich perpendikulär lassen, und den Gegenstand schief gegen die vertikale Projections-Ebene annehmen, in welchem Falle die Projection Übereck-Projection heißt; doch leisten alle diese Projections-Methoden nicht das Gewünschte. Daß es jedoch eine Projections-Methode gibt, welche die beyden oben erwähnten Forderungen leistet, soll jetzt gezeigt werden. Man denke sich die horizontale Projection eines Gegenstandes, und ziehe in der Horizontal-Ebene eine beliebige Gerade, und führe auf sie, der leichteren Construction wegen, wie die Folge zeigen wird, obschon es nicht gerade nothwendig ist, eine Perpendikuläre, und lege das durch jeden Gegenstandspunct auf die Horizontal-Ebene gefällte Perpendikel parallel mit der zweyten der vorhin gelegten Geraden, welche überhaupt Normal-Linien heißen können, auf die Horizontal-Ebene; um auf diese Art, wenn dieses von allen Puncten des Gegenstandes geschehen ist, erhält man nicht nur ein vollständiges Bild des Gegenstandes, sondern dasselbe Blatt leistet sowohl horizontale als vertikale Projection; und die Ausmessungen der Theile der Zeichnung sind ähnlich den entsprechenden des Gegenstandes. Diese Projections-Art soll Neutral-Projection heißen; es sey eine vertikale Säule mit einem über ihr liegenden horizontalen Balken, und beyde durch eine Strebe verbunden; so
Fig. 73, 74. stellt Fig. 73 die rein geometrische Projection; Fig. 74 die so genannte Übereck-Projection, bey der die Vertikal-Projection schief gegen die Seitenflächen des Gegenstandes steht, da bey ersterer die Vertikal-Projections-Ebene parallel mit den Seitenflächen des Gegenstandes angenommen wurde;
Fig. 75, 76. mithin bey Fig. 75, 76 die Vertikalen des Gegenstandes in der Projection umgeändert, die Horizontalen desselben
Fig. 77, 78. aber bey Fig. 77 sich verkürzen; Fig. 78 die perspectivische,

und Fig. 79 die Neutral-Projection vor. Diejenigen, die viel mit Perspectiv-Zeichnen sich abgeben, können sich füglich eines Lineals, Fig. 80, bedienen, bey welchem in der Verlängerung der Schneide desselben eine Öffnung ist, durch die ein Stift in den Begegnungspunct trifft; deren kann man so viele nehmen als Begegnungspuncte vorhanden sind, und man erspart sich das immerwährende Anlegen des Lineals an den Begegnungspunct. Fig. 79. Fig. 80.

Cycloide.

Dieselbe entsteht dadurch, daß sich ein Kreis A auf einer geraden Linie BC wälzt. Der Berührungspunct des Kreises und der Geraden heißt der erzeugende Punct; und seine bey dieser Bewegung nach und nach einnehmenden Orte gehören der Cycloide an. Man übersieht leicht, daß durch die Bewegung des erzeugenden Punctes, wenn derselbe wieder als Berührungspunct mit der Geraden erscheint, sich auf der Geraden die Peripherie des erzeugenden Kreises abgewickelt hat; daher trage man von dem ersten Berührungspuncte an auf diese Gerade den Umfang des erzeugenden Kreises, und theile nun den halben aufgetragenen oder ausgebreiteten Umfang in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; in eben so viele Theile theile man auch die halbe Peripherie des Kreises vom Berührungspuncte aus; errichte in den so erhaltenen Theilungspuncten der Geraden Perpendikel, so wird der Mittelpunct sich nach und nach in diesen Perpendikeln befinden, je nachdem ein, zwey oder mehrere Theile des Umfanges des Kreises sich auf der Geraden abwickelten. Führt man nun durch den Mittelpunct des erzeugenden Kreises eine Parallele zur gegebenen Geraden, und bemerkt die Durchschnitte derselben mit den erwähnten Perpendikeln, so geben sie die successiven Lagen des Mittelpunctes des beweglichen Kreises. Beschreibt man nun aus denselben mit dem Halbmesser des gegebenen Krei-

ses, Kreisbögen vom Mittelpuncte aus, und sucht die Durchschnitte dieser mit denen aus den Berührungspuncten derselben und der Geraden aufgetragenen Sehnen, vom ursprünglichen Berührungspuncte aus bis zu den diesen Berührungspuncten entsprechenden Theilungspuncten des gegebenen erzeugenden Kreises, so gehören diese Durchschnitte der Cycloide an; und es handelt sich nur, diese Puncte noch zu verbinden, welches durch die den einzelnen Elementen dieser Curve zugehörigen Krümmungskreise, deren Halbmesser, die so genannten Krümmungshalbmesser, bestimmt werden müsse; verbindet man die einzelnen Puncte der Cycloide mit den Tangirungspuncten des zugehörigen erzeugenden Kreises durch eine Gerade, und sucht die Durchschnitte jeder solchen mit der vorhergehenden dieser Art, so sind diese die Mittelpuncte der Krümmungskreise, und die Entfernung jedes solchen von dem zugehörigen Puncte der Cycloide der Krümmungshalbmesser; die Mittelpuncte selbst liegen in einer Curve, welche der geometrische Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise ist. Die Cycloide findet bey der Verzahnung ihre Anwendung; und zwar, wenn der Halbmesser des Getriebes gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, der Halbmesser des Rades unendlich, mithin die Peripherie eine gerade Linie wird, ist die Form der Zähne für das Rad nach der oben gegebenen Art unter dem erwähnten Verhältniß des erzeugenden Kreises zum Getriebe
Fig. 81. zu verzeichnen. Fig. 81.

E p i c y c l o i d e.

Die Epicycloide entsteht durch die Bewegung des Berührungspunctes eines Kreises auf der Peripherie eines andern; der bewegliche Kreis A heißt erzeugender Kreis, der andere B Grundkreis. Bey dieser Wälzung wickeln sich auf beyden Kreisen gleiche Bogenlängen ab; theilt man daher die Peripherie des einen Kreises in n Theile, so muß aus-

gemittelt werden, in wie viele Theile die des anderen zu theilen ist, damit $\frac{1}{n}$ Bogenlänge des ersten gleich der des gefundenen Theiles des zweyten Kreises ist. Die Ausmittelung geschieht dadurch, daß sich die Theilungszahlen gerade wie die Halbmesser verhalten. Der Mittelpunct des beweglichen Kreises bewegt sich in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich der Summe beyder Halbmesser und dessen Mittelpunct der des Grundkreises ist. Führt man nun durch den Mittelpunct des Grundkreises nach den Theilungspuncten desselben Gerade bis in den Durchschnitt mit dem oben erwähnten Kreise, so sind diese die successiven Lagen des beweglichen Kreises für die verschiedenen abgewickelten Theile desselben. Beschreibt man aus diesen Mittelpuncten mit dem Halbmesser des erzeugenden Kreises Kreisbögen, und trägt auf dieselben von den Berührungspuncten aus als Sehne, die Entfernung des Ursprungs der Epicycloide von den successiven Theilungspuncten des beweglichen Kreises; so geben die auf diesen Kreisbögen erhaltenen Puncte, Puncte der Epicycloide, die nun noch verbunden werden müssen. Diese Verbindung geschieht am genauesten durch Krümmungskreise, deren Mittelpuncte und Halbmesser, wie früher schon gezeigt wurde, durch den Durchschnitt zweyer Normalen der Epicycloide, oder zweyer solcher unmittelbar auf einander folgenden durch die bestimmten Puncte der Curve und die zugehörigen Berührungspuncte des beweglichen Kreises mit dem Grundkreise gehenden Geraden, bestimmt werden. Die Verzeichnung dieser Curve findet ihre Anwendung bey der Krümmung der Zähne. Fig. 82. Fig. 82.

Hypocycloide.

Sie entsteht durch die Bewegung des Berührungspunctes des erzeugenden Kreises A innerhalb des Grundkreises B; es ist hier wieder vor allen auszumitteln, wie auf beyden Kreisen die Eintheilung genommen werden muß,

damit eine Theilung auf den einen Kreis der Bogenlänge nach der des anderen Kreises gleich ist. Das übrige Verfahren ist wie bey der Epicycloide; nur wird sich oft der Fall ergeben, besonders wenn die Differenz des Halbmessers des Grundkreises und Durchmessers des beweglichen Kreises nicht sehr groß ist, daß die Mittelpuncte der Krümmungskreise sehr weit fallen; wird obige Differenz gleich Null, so geht die Hypocycloide in einen Halbmesser des Grundkreises über, der vom Berührungspunete beyder Kreise gezogen ist. Da in diesen Fällen die Krümmungshalbmesser sehr groß ausfielen, so verbinde man die gefundenen Puncte durch die
Fig. 83. freye Hand. Fig. 83.

Evolvente.

Man denke sich an einen beliebigen Punct einer Curve hier z. B. einen Kreis A, eine Tangente, und lasse dieselbe nun so bewegen, daß sie immer Tangente bleibt, jedoch nach und nach alle Elemente des Kreises in sich enthält, oder daß immer die Entfernung des ersten Berührungspunctes bis zu jedem anderen auf ihr, gleich dem zwischen diesen Berührungspuncten enthaltenen Bogenstück der Länge nach, gleich ist; die so durch die Bewegung des ersten Berührungspunctes entstehende Curve heißt Evolvente, und die Curve, durch deren Abwickelung sie entstand, Evolute. Um die Evolvente zu verzeichnen, theile man vom Ursprunge der Curve aus die Peripherie in mehrere gleiche Theile, und je kleiner diese Theilung angenommen wird, desto eher kann man die Sehne jedes Bogenstückes als die Bogenlänge desselben ansehen; an diese erhaltenen Theilungspuncte führe man Tangenten. Man setze in den zweyten Theilungspunct einen eröffneten Zirkel bis zum ersten, und beschreibe mit der so erhaltenen Sehne einen Kreisbogen bis in den Durchschnitt mit der durch den zweyten Berührungspunct geführten Tangente; sehe dann den dritten Theilungspunct

als Mittelpunct eines Kreises an, dessen Halbmesser die Entfernung dieses Mittelpunctes vom erwähnten Durchschnitte ist, und fahre auf diese Art weiter.

Diese Evolvente findet ihre Anwendung bey den Walktrögen; nach dieser Curve wird der hohle Theil derselben geformt, um ein zweckmäßiges Wenden der zu walkenden Waare zu erzielen. Sie dient als Form für den gekrümmten Theil der Zähne eines Getriebes, dessen Rad einen unendlich großen Halbmesser hat, oder mithin eine verzahnte Stange ist, Fig. 84, wo A die Evolute vorstellt. Fig. 84.

Schraubenlinie.

Man nehme einen beliebigen Cylinder, dessen Basis A, und dessen Generatrix ab, a′b′ ist, und setze ferner voraus, daß sich irgend eine Gerade an den Seiten des Cylinders aufwärts bewege, jedoch immer mit denselben einen constanten Winkel bilde. Denkt man sich mit der Bewegung dieser Geraden einen Faden in Verbindung, der sich an den Berührungspuncten der Tangente mit den Seiten des Cylinders anlegt, so tracirt sich auf letzterem die Schraubenlinie. Man nehme an, daß ein Theil der Schraubenlinie schon tracirt sey, und developpire nun den Cylinder, so wird die Schraubenlinie sich als Gerade darstellen, und sie ist die Seite eines Dreyeckes, dessen eine Seite die developpirte Schraubenlinie, dessen andere die developpirte Basis oder Conductrix des Cylinders, und die letzte ein Theil der Seite des Cylinders ist, in der Voraussetzung, daß der Anfangs- und Endepunct der Schraubenlinie auf derselben Seite des Cylinders sich befinden. Aus diesem ersieht man, daß, um die Schraubenlinie zu verzeichnen, man nur die Basis in eine beliebige Anzahl Theile zu theilen, und durch die so erhaltenen Puncte Seiten zu führen hat. Die Neigung der Tangente gegen die Seite des Cylinders muß immer gegeben seyn, und

wenn die Schraubenlinie von einem Berührungspuncte mit einer Seite des Cylinders an so weit tracirt wurde, bis sie wieder auf dieselbe Seite desselben gelangt, so heißt die Entfernung beyder Berührungspuncte Steigung der Schraubenlinie, und in dem vorher erwähnten Dreyecke ist der Neigungswinkel gleich dem durch die developpirte Basis und developpirte Schraubenlinie gebildeten gleich. Man denke sich nun an den auf der Conductrix angenommenen Ursprung der Schraubenlinie die tangirende Ebene, und in ihr die durch den Ursprung gehende Tangente; bewegt sich diese tangirende Ebene nun weiter, und mittelt man in ihren respectiven Lagen die Durchschnitte der in ihr liegenden Tangenten mit denen diesen Lagen zukommenden früher erwähnten Seiten des Cylinders aus, so erhält man Puncte
Fig. 85. der Schraubenlinie. Fig. 85. Eben so leicht ist es, an die Schraubenlinie durch einen gegebenen Punct auf ihr eine tangirende Ebene zu führen, indem die Lage derselben durch die durch diesen Punct gehende Seite des Cylinders und beweglichen Tangente bestimmt wird.

Sphärische Epicycloide.

Man denke sich zwey rechte Kegel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und deren Grundflächen Kreise sind, und nehme an, daß der eine Kegel sich um den anderen bewege, so wird der Berührungspunct der Grundflächen beyder Kegel eine krumme Linie beschreiben, welche die sphärische Epicycloide heißt; sie erhält ersteren Nahmen, weil der erwähnte Berührungspunct, durch dessen Bewegung die sphärische Epicycloide entsteht, immer in einem unveränderlichen Abstande vom Scheitel bleibt; mithin kann er immer auf einer Kugel gedacht werden, deren Mittelpunct der Scheitel beyder Kegel, und deren Halbmesser die Seite der Kegel ist; letzteren aber, weil sich auch Kreise wälzen. Man übersieht auch, daß die sphärische Epicycloide

in die Epicycloide übergeht, wenn die beyden Kegel in Cylinder übergingen, oder in rechte Kegel, deren Scheitel in unendlicher Entfernung lägen. Bey der Wälzung beyder Kegel ist es einleuchtend, daß sich auf beyden gleich große Bogen abwälzen; man theile daher die Peripherie des einen in eine beliebige Anzahl Theile, und die des andern in so viele Theile, daß der vorausgesetzten Bedingung Genüge geleistet wird. Da beyde Kegel rechte sind, so wird die Ebene der Basis des beweglichen Kegels eine constante Neigung gegen die Ebene der Basis des fixen Kegels haben; man müßte sich daher den Neigungswinkel der beyden Ebenen der Grundflächen der Kegel ausmitteln; es ist also auch die Neigung der Ebene der Grundfläche eines jeden Kegels gegen die horizontale Projections-Ebene bekannt. Hat sich der erzeugende Punct um einen Theilungsbogen weiter bewegt, so denke man sich von seiner neuen Lage ein Perpendikel auf die Horizontal-Ebene, und zugleich ein Perpendikel in der Ebene des beweglichen Kreises auf die Tangente, welche durch den Berührungspunct des beweglichen und fixen Kreises an beyde geführt wurde. Da diese letztere Perpendikuläre, so wie der erwähnte Neigungswinkel des beweglichen Kreises und der Horizontal-Ebene bekannt sind, so erhält man für die Construction ein rechtwinkeliges Dreyeck, dessen beyde Katheten die gesuchten Projectionen des Punctes der sphärischen Epicycloide geben. Soll an die sphärische Epicycloide eine Tangente geführt werden, so denke man sich durch den gegebenen Punct der Epicycloide, durch welchen die Tangente gehen soll, nach dem Scheitel des Kegels eine Gerade, so ist diese als der Halbmesser einer Kugel anzusehen, deren Mittelpunct der Scheitel ist, und auf derselben befindet sich der erwähnte Punct. Man sehe nun aber auch die Länge des Perpendikels vom gegebenen Punct auf die früher genannte Tangente als den Halbmesser einer Kugel an, deren Mittel-

punct der Berührungspunct des beweglichen und fixen Kreises ist, so befindet sich der gegebene Punct auch auf dieser Kugel; die zu suchende Tangente muß aber auf die Halbmesser beyder Kugeln perpendikulär seyn; man lege daher durch den Punct der Curve auf jeden der Halbmesser eine perpendikuläre Ebene, so wird ihr Durchschnitt die gesuchte Tangente seyn. Ihre Anwendung findet bey der Form der Zähne bey Winkelrädern Statt.

Fig. 86. Fig. 86.

Kugelnetz.

Da die Kugel eine Oberfläche ist, die sich nicht vollkommen developpiren läßt, so kann auch die Darstellung des Kugelnetzes nur näherungsweise geschehen. Man nehme auf der Kugel einen zur horizontalen Projections-Ebene parallelen größten Scheitel, und theile die Peripherie desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; legt man nun durch zwey zunächst auf einander folgende Theilungspuncte größte Kreise, die auf die Ebene des zuerst angenommenen perpendikulär sind, so bildet sich auf der Oberfläche der Kugel eine durch zwey größte Kreise, die sich in den beyden Polen der Kugel schneiden, gebildete Fläche, sie heiße Meridianid; und der durch diese beyden Ebenen und der zwischen ihnen enthaltenen die Oberfläche der Kugel begränzte Raum, Meridianoloid. Um daher die ausgebreitete Kugeloberfläche näherungsweise zu erhalten, darf nur ein Meridianid ausgebreitet, gezeichnet werden. Man ziehe sich nach irgend einem angenommenen Maßstab eine gerade Linie, deren Länge gleich der Peripherie des größten Kreises ist, und trage auf ihr die als gerade Linien ausgebreiteten Bogen desselben. Man führe nun durch einen Pol der Kugel auf die Ebene des ersten größten Kreises eine durch den Halbirungspunct des Bogens eines Meridianides gehende perpendikuläre Ebene, und führe durch beliebige

Puncte des einen das Meridianid begränzenden größten Kreises zur letztgezogenen Perpendikulär-Ebene, parallele Ebenen, und bemerke die Durchschnitte dieser sowohl mit der Peripherie des ersten größten Kreises, als auch mit dem Durchschnitte der Ebene des ersten größten Kreises und des anderen das Meridianid begränzenden; zweckmäßiger aber ist es, statt die Theilungspuncte, durch welche die letzterwähnten Ebenen gelegt wurden, auf den Begränzungskreis des Meridianides zu nehmen, sie auf den ersten größten Kreis zu wählen, wozu nur die Hälfte des Bogens auf denselben in mehrere gleiche Theile getheilt werden darf, da die eine Hälfte des Meridianides gleich der anderen ist; man lasse nun die oben angenommenen durch Puncte des einen das Meridianid begränzenden größten Kreises gelegten Ebenen, um ihren Durchschnitt mit der Ebene des ersten größten Kreises bewegen, bis sie mit der Ebene des letzteren zusammenfällt; errichtet man durch die Durchschnittspuncte der Tracen dieser Kreise auf den ersten Kreis mit der Trace des das Meridianid begränzenden Kreises auf diesen Durchschnitt ein Perpendikel, so sind diese Perpendikel die Sinusse jener Bogen, welche auf der Kugel durch die gelegten Ebenen hervortreten; sie werden gefunden, indem man sich die Kreise verzeichnet, die zu diesen Bogen gehören, und aus den bekannten Sinussen auf die Bogenlänge schließt; die Entfernung der Durchschnittspuncte der Peripherie des ersten größten Kreises mit den Ebenen sind die Durchmesser dieser Kreise. Man theile nun die halbe ausgebreitete Bogenlänge in eben so viele Theile, als es auf der Kugel geschah, und errichte in diesen Perpendikel, deren Länge gleich der ausgebreiteten Länge der Bogen von den erwähnten Kreisen ist. Auf diese Art erhält man ein halbes Meridianid, mithin auch das ganze, und daher eben so viele ausgebreitete sich tangirende, als Theilungen auf der Kugel angenommen wurden. Fig. 87. Fig. 87.

Die Maschinenzeichnung gehört der Behandlung nach unter die schwierigsten Gattungen Zeichnungen, vorzüglich darum, weil es sich hier um die Darstellung von Gegenständen handelt, die in so vielen Ebenen liegen. Nicht nur allein, damit solche Zeichnungen genügend sind, bedarf es der horizontalen und vertikalen Projection, sondern auch von Detail-Plänen, die die im Inneren der Maschine sich verbindlichen Theile darstellen. Vorzüglich nothwendig sind jene Constructionen, die vermöge der Bewegung irgend eines Theiles der Maschine, zur Bedingung der Bewegung eines anderen Maschinentheiles dienen. Die Behandlung der Maschinen mit Tusch fordert sehr viele Übung, eben deßwegen, um die mannigfaltigen Lagen der Maschinentheile deutlich darzustellen. Bey Behandlung mit Farben kommt es hauptsächlich darauf an, die Farbe und Textur der verschiedenen Holzgattungen wohl zu studieren. Liegt es aber nicht daran, eine bestimmte Holzgattung darzustellen, so kann das Holz manierirt werden, das heißt ganz nach Gutdünken behandeln, und einen sehr guten Effect erhält man, wenn in der Textur sehr helle Stellen gehalten, und die Behandlung sehr blaß nur mit zerstreuten stärkeren Tönen ausgeführt wird.

Das Modellzeichnen, so wie überhaupt das Aufnehmen erbauter Maschinen hat in Vielem Ähnlichkeit; doch kommt bey letzteren es darauf an, daß ehe man zur wirklichen Aufnahme schreitet, die eigentlichen wirksamen Theile der Maschine von jenen Theilen abgesondert betrachtet werden, die nur als Stütze des Ganzen oder als Gerüste dienen. Bey solchen Aufnahmen ist das Erste, sich von der Maschine mit freyer Hand eine Skizze von deren horizontalen als vertikalen Projection zu machen, die Dimensionen zu cotiren. Zur besseren Übersicht des Ganzen dient auch eine skizzirte perspectivische Projection, die sehr leicht dadurch bewerkstelliget wird, daß man sich vorher ausmittelt,

wie viele Gattungen paralleler Linien vorhanden sind, und dann vermöge der Entfernung des Auges vom Gegenstande auf die Größe des Perspectives schließt. Um die Maschine besser übersehen zu können, müssen immer große Maßstabe gewählt werden; man reicht meist aus, den Zoll gleich einem Schuh zu setzen; für Detail-Pläne ist aber ein noch größerer Maßstab zweckmäßiger. Die Aufnahme der Maschinen selbst muß immer mit den hauptwirksamen Theilen anfangen, nähmlich mit den Achsen des Räderwerkes, denen der Kurbeln, den Mittelpunct des Kolbens u. s. w. Bey vielen Maschinen bedarf es nicht der Messung aller Theile, viele ergeben sich von selbst; der Controlle wegen ist es aber meist zweckmäßig, sie mit aufzunehmen; wie z. B. bey einer Dampfmaschine die Hubhöhe des Kolbens aus der Lage des Ruhepunctes des Balanzier, des Einhängpunctes der Kurbel und des Kolbens, und die Höhe der Kurbel sich ergibt. Sehr schöne Constructionen, die aber die größte Genauigkeit erfordern, lassen die Steuerungen bey Dampfmaschinen zu, es handelt sich nähmlich, das Verhalten des Weges irgend eines beweglichen Punctes des Ventiles gegen einen beweglichen Punct desjenigen Theiles der Maschine, der das Öffnen und Schließen unmittelbar hervorbringt. Bey solchen Aufnahmen, wenn sie ganz entsprechend seyn sollen, müssen die dabey gemachten Erfahrungs-Daten, von denen die Qualität der Maschine abhängt, mit angemerkt werden; dazu ist zu rechnen die für die beste Arbeit nöthige Geschwindigkeit der Maschinentheile. Um an einer Maschine Versuche anzustellen, und daraus das mechanische Moment derselben abzuleiten, hänge man an einen beliebigen Maschinentheil, und wenn eine Wahl vorhanden bleibt, an den geeignetsten so viel Gewichte an, bis eine Einleitung der Bewegung wahrgenommen wird; diese so angebrachte Kraft wird nach statischen Gesetzen dann auf jenen Punct reducirt, wo unmittelbar der Widerstand Statt findet, und das Pro-

duct dieser neuen Kraft in die bedingte Geschwindigkeit dieses letzteren Maschinentheiles gibt das mechanische Moment der Maschine mit Inbegriff aller Nebenhindernisse.

Oft kommt man in den Fall, Maschinen zu sehen, und um die Idee derselben nicht zu verlieren, ist ein Perspectiv nach freyem Auge das zweckmäßigste, da es sich nur um den Gedanken, keineswegs aber um das Verhalten der einzelnen Theile gegen einander handelt.

Bey allen practischen Aufnahmen, die von den Hörern der Maschinenlehre des k. k. polytechnischen Institutes gemacht wurden, wurde jeder Maschine auch eine technologische Beschreibung mit Inbegriff des Quantums der Arbeit, das sie in einer bestimmten Zeit liefert, beygefügt, um so in kommenden Umständen ein Mittel zu haben, sich Raths zu erhohlen; wozu diese Aufnahmen schon deßwegen als Norm dienen können, da sowohl die Zweckmäßigkeit als Schönheit der wirklich erbauten und aufgenommenen Maschinen nichts zu wünschen übrig lassen.

Nicht ohne Interesse ist es, ein großes Erleichterungsmittel bey Entwürfen von Maschinen zu besitzen. Man bediene sich dabey des so genannten quadrirten Papiers, das gemeiniglich als Muster für Stickerey dient, und sehe die Seite eines darauf angebrachten Quadrates als ein beliebiges Maß, z. B. als einen Zoll oder Schuh an; da bey einem Entwurfe die ohngefähren Maße bekannt sind, so erhält man dadurch ein Mittel mit ziemlicher Richtigkeit, den Entwurf zu bewerkstelligen, indem die Maschinentheile in jene Quadrate gesetzt werden, je nachdem die Dimension desselben es erfordert. Sehr gut ist es überdieß, größere Abtheilungen auf diesem Papiere durch schärfere Striche zu beziehen, und die Entfernung zweyer solchen Striche für eine Klafter gelten zu lassen, um dadurch über das Ganze mehr Übersicht zu erhalten.

Anmerkung. Unter die früher erwähnten Methoden, Per-

spectiv zu zeichnen, verdient die letzte eine besondere Aufmerksamkeit: sie ist nähmlich dort mit vielem Vortheil zu gebrauchen, wo die Perspectiven der Puncte in nicht sehr großen Abständen von dem Horizont erscheinen, weil dafür die Durchschnitte beyder nöthigen Linien sich mehr perpendikulär treffen, mithin ihr Durchschnittspunct strenge bestimmt werden kann. Für das Perspectiv eines Cylinders kann man die sichtbare Contur dadurch erhalten, daß man durch das Auge an denselben zwey tangirende Ebenen legt; oder auch, daß man das Perspectiv der beyden Grundflächen des Cylinders sucht, und dann an die so erhaltenen Perspectiven Tangenten führt. Dem bey Fig. 58 Gesagten kommt noch beyzufügen, daß sich immer die Gränze ausmitteln läßt auf dem Gegenstande, was von ihm im Spiegel sichtbar seyn wird, indem man durch die Gränze des Spiegels und das Auge sich Strahlen denkt, die eine Oberfläche bilden; der Durchschnitt dieser und des hinter den Spiegel getragenen Gegenstandes, gibt die Gränze der sichtbaren Theile.

Aus dem nun Gesagten wird man wohl übersehen haben, daß immer die Wahl der Projections-Ebenen beliebig war, und es wurde dabey erinnert, wie oft durch eine schickliche Wahl derselben das Resultat schneller und einfacher hervortritt, als wenn die Wahl derselben, die immer beliebig seyn kann, abgesehen von Allem, oder willkürlich angenommen wird. Durch eine zweckmäßige Wahl dieser Projections-Ebenen will man nur erreichen, daß die Projectionen von Schnitten aus Oberflächen mit Ebenen entweder gerade Linien oder Kreise werden.

Der allgemeine Fall, nähmlich die Willkür der Annahme der Projections-Ebenen, mußte aufgestellt werden, wenn die Sache anders nicht empirisch erscheinen soll; zugleich ist aber auch aufmerksam gemacht worden, welche Vortheile oft durch eine zweckmäßige Begründung derselben für das Resultat sich uns ergeben. Es kann Fälle geben, wo für ein System von Untersuchungen eine gewisse Annahme der Projections-Ebenen wohl sehr zweckmäßig für eine der-

selben, keineswegs es aber für die übrigen ist; und es wäre gewiß sehr eine mühsame und ungenaue Verfahrungs-art, für jede der Untersuchungen die ihr zweckdienlichste Annahme der Projections-Ebenen anzunehmen, da man im Stande ist, mit einer einzigen willkürlichen Annahme solcher, zum Resultate zu gelangen.

Oft kann irgend eine Auflösungsart zusammengesetzt erscheinen, sie wurde aber dann aus dem Grunde aufgeführt, weil diese Verfahrungsart gerade es seyn kann, die in andern Fällen mit benutzt werden kann. So bey Bestimmung des Schattens einer Kugel bey beyden Beleuchtungen. Geschieht die Beleuchtung derselben durch Sonnenlicht, so ergibt sich, wie schon erwähnt wurde, die Trace der Ebene des Beleuchtungskreises, daß man durch den Mittelpunct der Kugel eine auf die Lichtstrahlen perpendikuläre Ebene legt; auch für Lampenbeleuchtung läßt sich dieses anwenden; dafür ist aber nur der durch den Mittelpunct des Beleuchtungskreises gehende Strahl perpendikulär auf die Ebene dieses Kreises; sind mithin die Projectionen des Mittelpunctes desselben ausgemittelt, so darf nur eine auf diesen Strahl perpendikuläre durch diesen Mittelpunct gehende Ebene gelegt werden, so geben die Tracen, die der Ebene des Beleuchtungskreises.

Auch die früher gegebene Auflösung, den Schatten einer Kugel auf eine andere betreffend, um die Schattenpuncte auf der Kugel zu finden, läßt sich in dem Falle einfacher darstellen, wenn das Licht parallel zur vertikalen Projections-Ebene steht. Sind daher auf der einen Kugel die Puncte schon bestimmt, die ihren Schatten auf die andere absetzen, so läßt sich das Treffen des Strahles und der Kugel auf folgende Art auch finden:

Man lege durch einen solchen Punct einen Strahl, und bestimme sich dessen horizontale und vertikale Projection,

die Durchschnittspuncte der horizontalen Projection mit der horizontalen Projection des Kreises geben, durch eine Gerade verbunden, den Durchmesser jenes Kreises der Kugel, auf dem sich der Strahl absetzt; stellt man diesen Kreis in seiner vertikalen Projection dar, die wieder ein Kreis seyn wird, und sucht den Durchschnittspunct derselben mit der vertikalen Projection des Strahles, so ist er die vertikale Projection des Schattenpunctes dieses Strahles auf der anderen Kugel.

Geschähe die Beleuchtung beym Lampenlicht, so dürfte man nur jeden solchen Kreis um die horizontale Trace seiner Ebene (in welcher sowohl der leuchtende Punct als auch der schattenwerfende Punct, beyde in der wirklichen Lage, die sie gegen diesen Kreis und die horizontale Projections-Ebene haben, sich befinden) bewegen lassen, und den Durchschnitt des in dieser Ebene gezogenen Strahles mit der Peripherie dieses Kreises bestimmen; fällt man von demselben auf die horizontale Trace dieser Ebene ein Perpendikel, so gibt der Durchschnitt desselben mit der horizontalen Trace der gelegten Ebene die horizontale Projection des Schattenpunctes auf der Kugel. Führt man von der so gefundenen horizontalen Projection ein Perpendikel auf die Projections-Achse, und trägt von dem Durchschnitte dieser mit jenen die Höhe des vom erhaltenen Durchschnitte auf die horizontale Trace der Ebene gefällten Perpendikels auf, so ergibt sich die vertikale Projection dieses Schattenpunctes.

Auch für Sonnenbeleuchtung würde dieselbe Verfahrungsart gelten, wenn das Licht schief gegen die vertikale Projections-Ebene stände.

Es ist also immer sehr zweckmäßig, sich auf der Seite des Zeichnungsblattes für Lampenlicht diese Durchschnitte zu bestimmen, für Sonnenbeleuchtung enthält aber jede der erwähnten Ebenen das Licht, unter dem

wahren Neigungswinkel desselben gegen die Horizontal-Ebene.

Für Durchdringung eines Cylinders oder Kegels mit einer Kugel könnte auch dieselbe Verfahrungsweise angewendet werden, und jeder Strahl oder Seite eines Cylinders oder Kegels würde im Allgemeinen jeden so angenommenen Kreis in zwey Puncten schneiden.

Das Verfahren für einen solchen Kreis gilt auch für alle anderen.

Die nun aufgestellten Grundsätze werden hinreichen, alle nur möglichen Constructionen auszuführen. Fälle davon, die nicht in unser Gebieth eigentlich einschlagen, sind jedoch schon mit enthalten, wie z. B. das Perspectiv eines Gegenstandes in einer Kuppel zu finden, und jeder, der diese Sätze sich eigen gemacht hat, wird in vorkommenden Fällen sich wohl zu benehmen wissen. Viele Schlüsse, die als bloße Folge anzusehen sind, oder Folgerungen die von selbst leicht gemacht werden können, wurden hier übergangen, weil da jeder nur, wenn er selbst construirt, in dieser Wissenschaft weiter schreitet. So z. B. in der XXIV. Aufgabe, wo es sich handelt, daß wenn ein Schnitt der Kugel als Basis eines Kegels dessen Scheitel der des gegebenen ist, den Schnitt dieses neuen Kegels mit der Horizontal-Ebene zu finden, der offenbar ein Kreis, so folgt ganz natürlich, daß der Mittelpunct dieses Kreises dadurch gefunden wird, daß man durch den Scheitel und den Mittelpunct des Kugelschnittes eine Seite legt, und den horizontalen Durchgang derselben bestimmt; da ferner die Durchgänge aller Seiten dieses Kegels in der Peripherie eines Kreises liegen, so, um den Halbmesser dieses Kreises zu erhalten, darf nur noch der horizontale Durchgang eines solchen Strahles gesucht werden; die Entfernung dieses

Durchganges von der ersten gibt den Halbmesser desjenigen Kreises, der aus dem Durchgange der ersten Seite beschrieben, der Durchschnitt der Horizontal-Ebene mit der konischen Oberfläche ist.

Anmerkungen.

I. Man wird wohl aus dem nun Gesagten leicht übersehen, daß die gewöhnliche Verfahrungsweise von Durchdringung von Oberflächen oft in vielen Fällen nicht zulangte, und daß die XXVII. Aufgabe die Seele der Auflösungen aller auf konische oder cylindrische Oberflächen sich beziehenden Aufgaben ist. Nur erachte ich für nöthig, Folgendes noch beyzufügen, welches früher deßhalb nicht geschah, um durch Anzeige von Neben-Operationen die Hauptsache nicht zu verlieren:

Um auf den Kreis jene Puncte zu erhalten, die ihren Schatten auf den Kegel werfen, wurde erwähnt, an denselben zwey an den Kegel tangirende zum Lichte parallele Ebenen zu legen, und die Durchschnitte dieser und der Ebene des Kreises zu finden. Diese Durchschnitte ergeben sich leicht dadurch, daß man durch den Scheitel des Kegels einen Strahl legt und dessen horizontalen Durchgang ausmittelt, von diesen führe man zwey Tangenten an den Kreis, und bemerke ihre Durchschnittspuncte mit der horizontalen Trace des Kreises, diese beyden Puncte mit dem Durchschnittspuncte des durch den Scheitel gelegten Strahles und der Ebene des Kreises durch Gerade verbunden, geben die obgenannten Durchschnitte.

Bey der XXVII. Aufgabe ist es aber immer das Zweckmäßigste, die auf der Ebene des Kreises tracirte Ellipse, oder den Schnitt des Kegels (bey Lampenlicht), dessen Scheitel der leuchtende Punct und Basis die Conductrix des gegebenen Kegels ist, für Sonnenlicht aber der Schnitt des Cylinders, dessen Basis dieselbe Conductrix, und Generatrix der Lichtstrahl ist, durch die Ebene des Kreises, ganz geschlossen zu verzeichnen.

II. Wenn die Durchgänge eines Systemes von Linien (parallel oder nach einem Puncte gehend) mit einer geneigten Ebene

gefunden werden sollen, so darf in der Horizontal-Ebene nur eine beliebige Parallele zu ihrer horizontalen Trace gelegt, und sie bis in die Projections-Achse verlängert werden; durch diesen Durchschnittspunct ein Perpendikel auf die Projections-Achse bis an die vertikale Trace dieser Ebene gibt die Höhe, in welcher die schiefe Ebene durch alle jene Perpendikel auf die Horizontal-Ebene getroffen wird, die durch die Durchschnittspuncte der Parallelen mit den horizontalen Projectionen der gegebenen Geraden errichtet werden; stellt man die Durchgangspuncte dieser Perpendikel mit der gegebenen Ebene in ihren Projectionen dar, projicirt sich ferner die Durchschnittspuncte der horizontalen Trace der Ebene und der horizontalen Projectionen der gegebenen Ebene dar, so geht jeder Durchgangspunct dieser Geraden mit der Ebene durch den Durchschnitt der gegebenen Geraden und derjenigen Geraden hervor, die durch die beyden Durchgangspuncte der durch zwey Puncte der horizontalen Projection auf die Horizontal-Ebene errichteten Perpendikel, gezogen wurde (für den Durchschnitt der horizontalen Projection der Geraden und der horizontalen Trace der Ebene ist dieses Perpendikel gleich Null).

III. Bey Beleuchtung im Perspectiv kann es geschehen, daß das Perspectiv der horizontalen Projection eines Strahles sich nicht nach abwärts mit dem Perspectiv der vertikalen Projection desselben Strahles schneidet; der Durchschnitt kann nach abwärts fallen, und in diesem Falle ist der Schatten nicht sichtbar; aber derselbe Fall tritt ein, wenn die Schattengränze parallel mit der Grundlinie ist.

IV. Damit perspectivische Puncte nicht durch zu schiefe Durchschnitte hervorgehen, muß immer vorher überlegt werden, ob das Perspectiv der diesen Punct enthaltenden Geraden aus dem Augepuncte oder vom Begegnungspuncte abzuschneiden sey.

V. Denkt man sich durch das Auge eine zur Tafel parallele Ebene, so können offenbar nur jene Gegenstände gesehen werden, die in einem Halbkreise liegen, der mit dem Abstande des Auges von der Tafel in der durch das

Auge gelegten Ebene beschrieben wurde, und dessen Durchmesser in dem Durchschnitte der durch das Auge gelegten horizontalen Ebene und durch das Auge zur Tafel parallel gelegten Ebene liegt. Gegenstände, die hinter dem Auge liegen, können auf der Tafel nur dann erscheinen, wenn man sich nach ihnen Sehstrahlen nach rückwärts denkt, und das Perspectiv erscheint oberhalb den Perspectiven der anderen vor dem Auge sich befindlichen Gegenstände, und verkehrt. In Fig. 88 sind zwey Würfel, der eine vor, der andere rückwärts des Auges, im Perspectiv dargestellt. Fig. 88.

VI. Bey der Aufgabe, daß der Schatten eines cylindrischen Glases gefunden werden soll, wurden die Strahlen angenommen, daß sie ohne Brechung durch das Glas gehen, und zwar aus dem Grunde, weil diese Ablenkung zu sehr von der Masse des Glases abhängig ist, und die Abweichung der Lage des Schattens von der wahren, wird nicht sehr beträchtlich seyn.

VII. In der Fig. 67 wurde die Dicke des Spiegels als eine Linie betrachtet, und zwar der Einfachheit wegen.

VIII. Wenn es sich um Ausmittelung der Fixpuncte handelt, wie z. B. bey der XXV. Aufgabe, so sind dieselben die Durchschnittspuncte der vertikalen Projection des Kreises, und der vertikalen Projection des Durchschnittes der Ebene des Kreises, und der durch die horizontale Trace der der schattenauffangenden Ebene parallel zum Lichte gelegten Ebene; die so erhaltenen Durchschnittspuncte sind aber nie sehr genau bestimmt, da die vertikale Projection des Kreises nur durch einzelne Puncte projicirt wurde; in diesen und ähnlichen Fällen ist es am zweckmäßigsten, diese Fixpuncte sich eigens zu projiciren, welches dadurch geschieht, daß man den Durchschnitt der erwähnten beyden Ebenen so darstellt, wie er erfolgt, wenn man die Ebene des Kreises um ihre horizontale Trace bewegt, daß sie mit der horizontalen Projections-Ebene zusammengefallen ist; die Durchschnittspuncte des so umgelegten Kreises mit dem erwähnten Durchschnitt, geben die Lage der Fixpuncte in ihrer Ebene, und man kann leicht auf ihre Projectionen schließen.

IX. Eben so auch bey der XXVII. Aufgabe geschieht das Traciren des Cylinders oder Kegels, deren Basis die des gegebenen Kegels ist, und deren Seiten die Lichtstrahlen sind, dadurch sehr leicht, daß man für Sonnen- oder Lampenbeleuchtung die Basis durch Parallele zur horizontalen Projection des Lichtes theilt, und da beyde zu diesen Parallelen gehörigen Lichtstrahlen in einer Ebene liegen, so darf nur jetzt noch eine Gerade gesucht werden, die in dieser und der Ebene des Kreises liegt, und es ergeben sich durch den Durchschnitt dieser Geraden und der angenommenen zwey Lichtstrahlen, zwey Durchschnittspuncte, der in der Ebene des Kreises tracirten Curve.

Hier ist auch die in Anmerkung II. gegebene Abkürzung anzuwenden.

X. Die in Fig. 58 gegebene Auflösung vereinfacht sich noch mehr, wenn man von dem Durchschnitt der drey Kanten einen Strahl zieht, und dessen Durchgang mit der Ebene des Kreises ausmittelt; man darf mithin, um die dort erwähnten Durchschnitte in der Ebene des Kreises zu finden, nur noch in jeder der drey Kanten noch einen Strahl legen.

XI. Da Linien, die perpendikulär auf die Tafel sind, ihre Begegnungspuncte in unendlicher Entfernung haben, so erscheinen sie, wie schon aus Früherem leicht zu übersehen ist, auch perpendikulär, und unter sich parallel.

Verbesserungen.

Seite	Zeile	
2	—	in der Note setze zu *) Ausgenommen
3	31	statt: vertikale lies: horizontale
3	32	» horizontale » vertikale
20	10	» gehen » gehet
32	27	» die » jede der
32	27	» Curve » Curven
33	24	» die » die wahre
35	13	» Glanz- oder Beleuchtungskante lies: Beleuchtungskante
37	19	» Oberfläche lies: Oberfläche und dem Auge näher
37	20	» hat lies: hat allgemein
39	28	» ihren » seiner
45	27	» Ebene » Ebenen
48	14	» dächte man » man denke
48	15	» schließt » schließe
48	17	» bestimmt » bestimme
49	33	» Projection » Projectionen
62	16	» Projection des Lichtes lies: Trace der einen am Kegel tangirenden zum Lichte parallelen Ebene.
77	30	setze zu: (und allgemein für Sonnen- oder Lampenbeleuchtung ergibt sich die Glanzkante an cylindrische oder konische Oberflächen, daß man den Durchschnitt dieser Oberflächen mit der zum Lichte parallelen Ebene sucht).
92	39	setze zu hervor als Note: *) Sollten Linien im Perspectiv dargestellt werden, die dem Horizont nach und nach sich nähern, wie z. B. bey Fußböden, um bequem zu verfahren, so nimmt man im Grunde eine Linie so an, daß sie diese Linien im Geometrischen schneidet, und bemerke die Durchschnittspuncte dieser und der angenommenen, setze die angenommene Linie sammt den auf ihr enthaltenen Puncten in das Perspectiv, und führe von den Perspectiven dieser Puncte nach den den Linien zukommenden Begegnungspuncten Linien.
112	16	statt: Gerade setze zu: (die wie die ihr homogenen für Sonnenlicht parallel, für Lampenlicht sich im Durchgange des durch den leuchtenden Punct auf die Horizontal-Ebene errichteten Perpendikels mit der gegebenen Ebene, schneiden.)

Fig. 7.

Fig. 12.

Fig. 14

Fig. 18.

M. Bauer sc

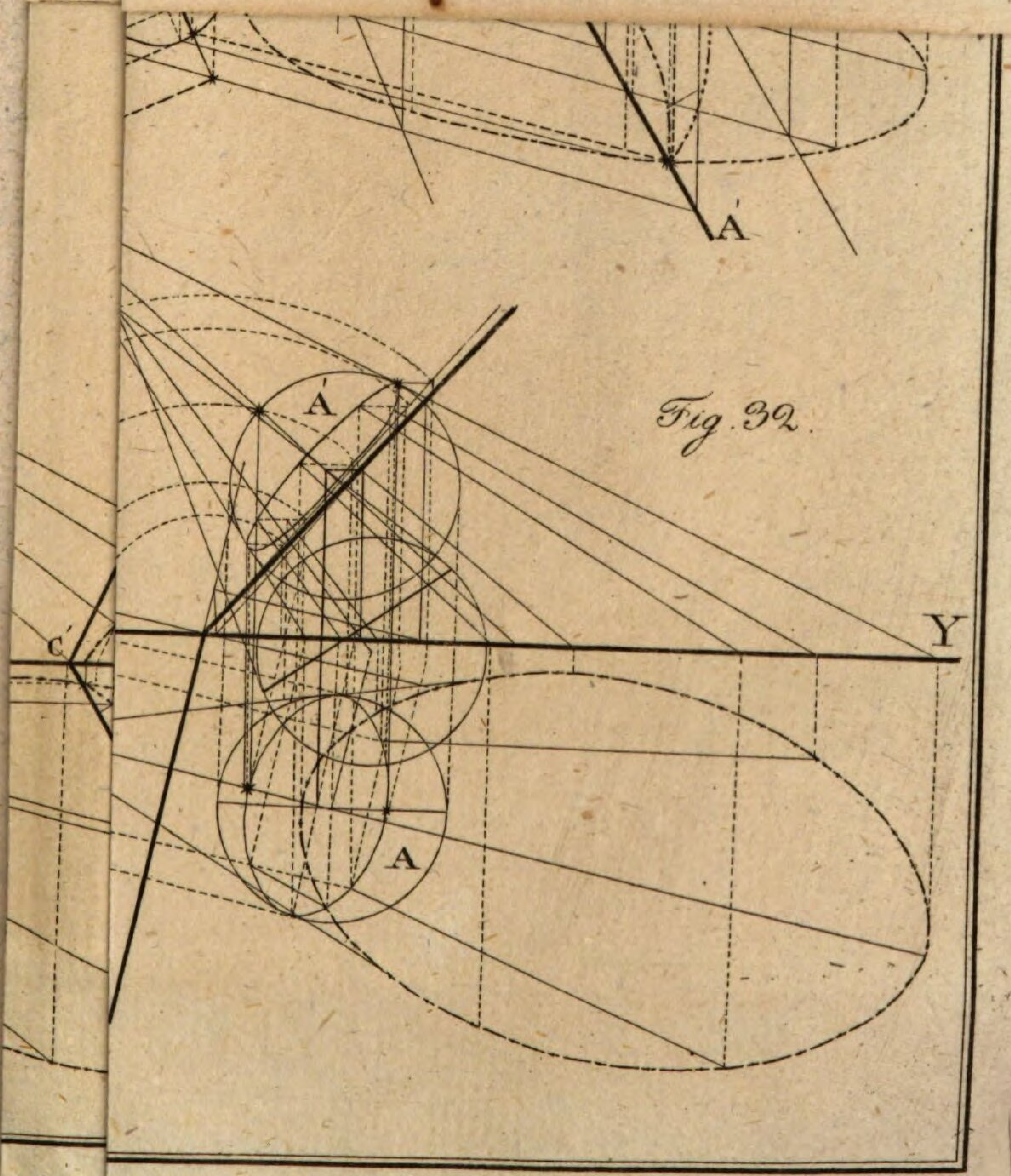
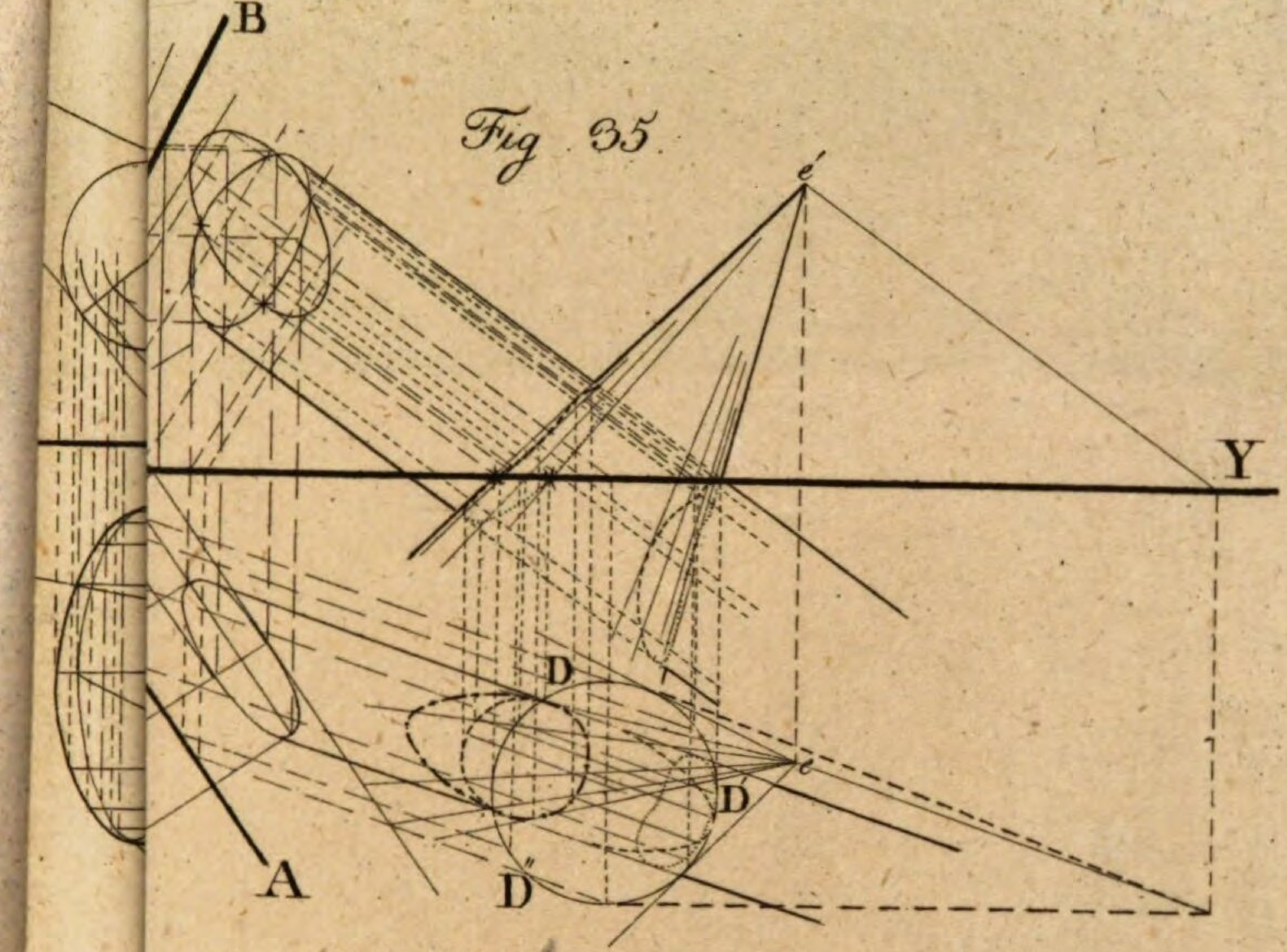


Fig. 32.

M. Bauer fc.

Fig. 35.



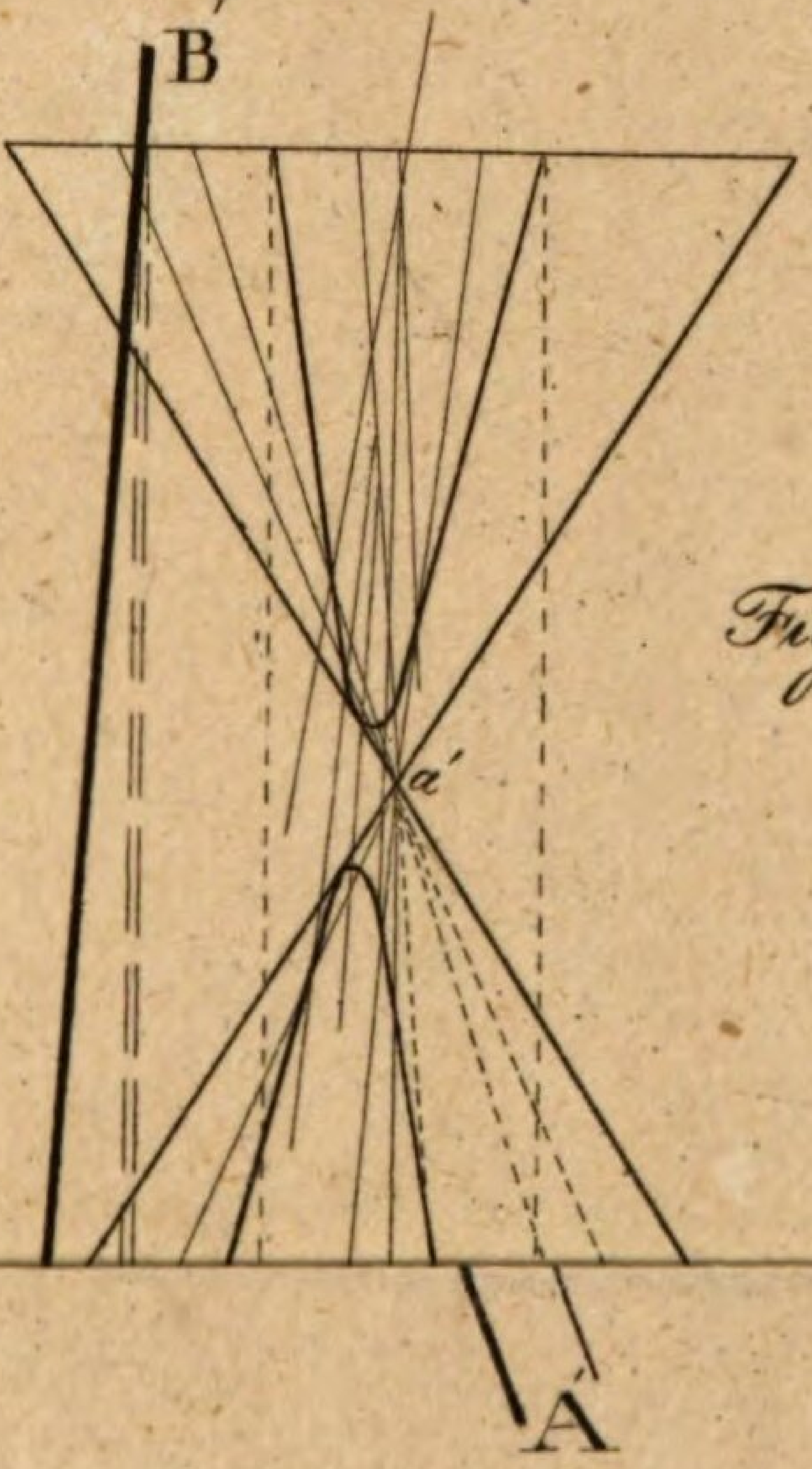


Fig. 39.

ipsoide it den Ellipsoid, Kreise werden, es projectirt sich hier„
eines ark acb rechtwinklig ist, das Dreyeck c'db ist gleich dem von
Fig. 37 er ist die bewegliche Ebene schief, und das Verfahren daßelbe.

M. Bauer sc.

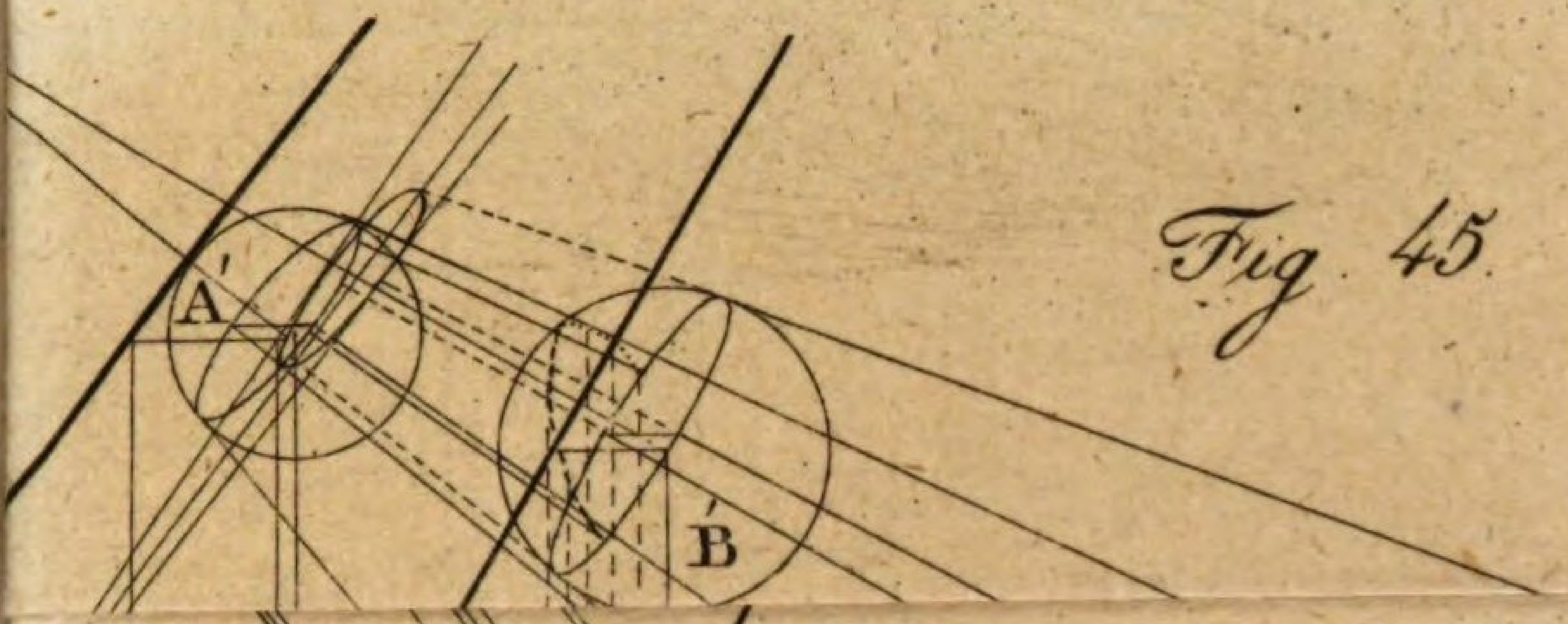


Fig. 45

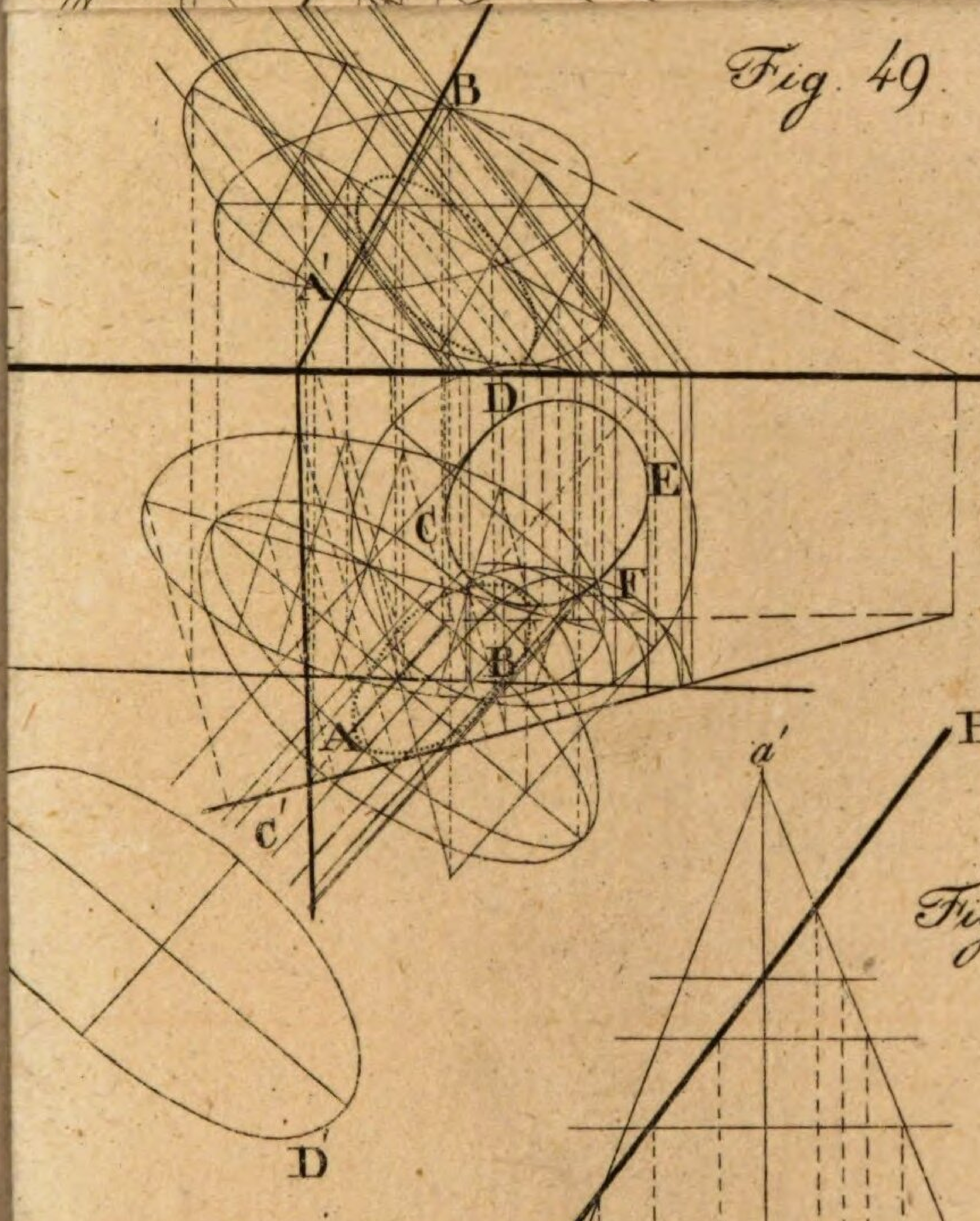


Fig. 49

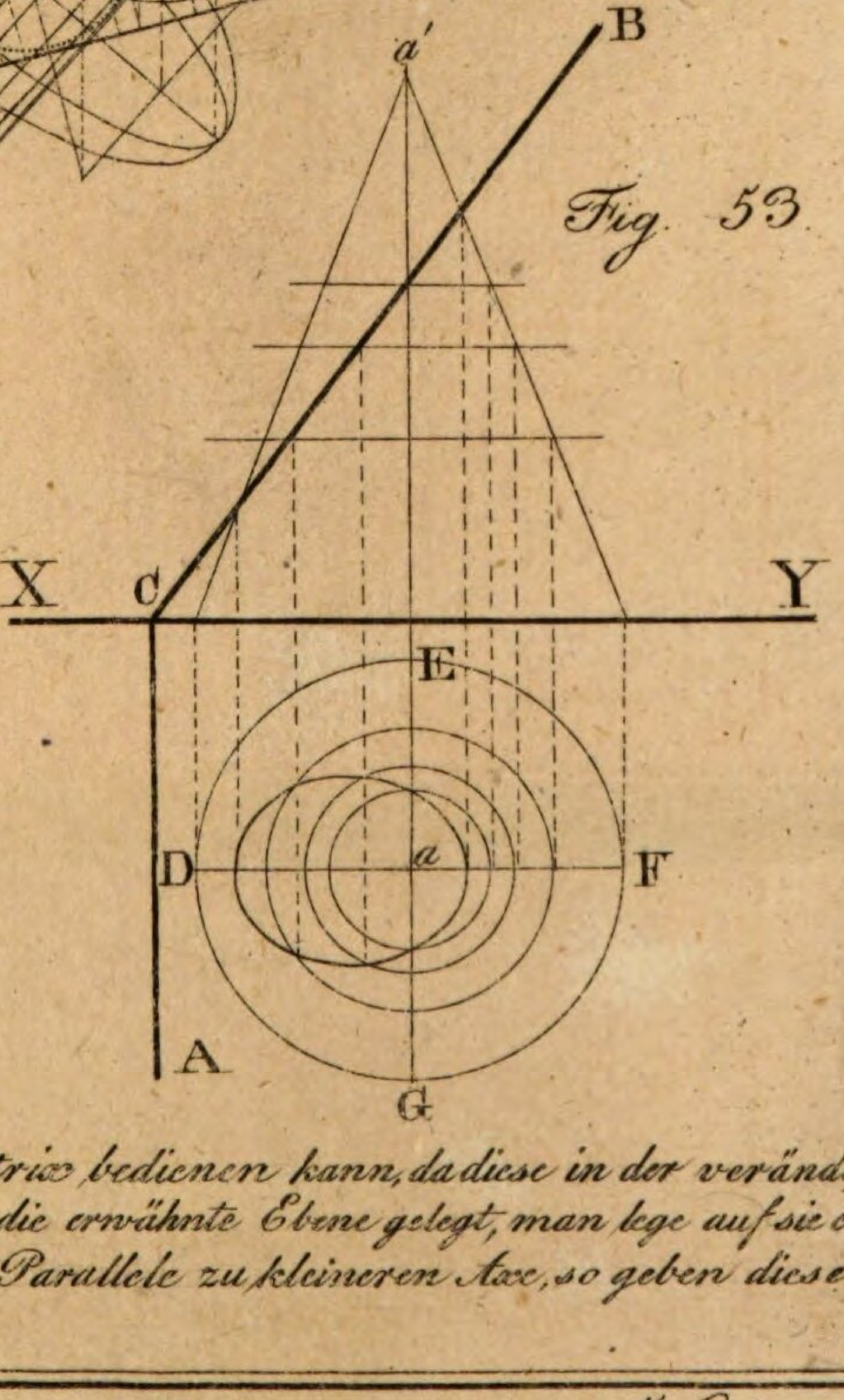


Fig. 53

derselben Generatrix bedienen kann, da diese in der veränder„
otationsaxe ist, ist die erwähnte Ebene gelegt, man lege auf sie eine
Puncte und legt Parallele zu kleineren Axe, so geben diese

M. Bauer sc.

Fig. 57.

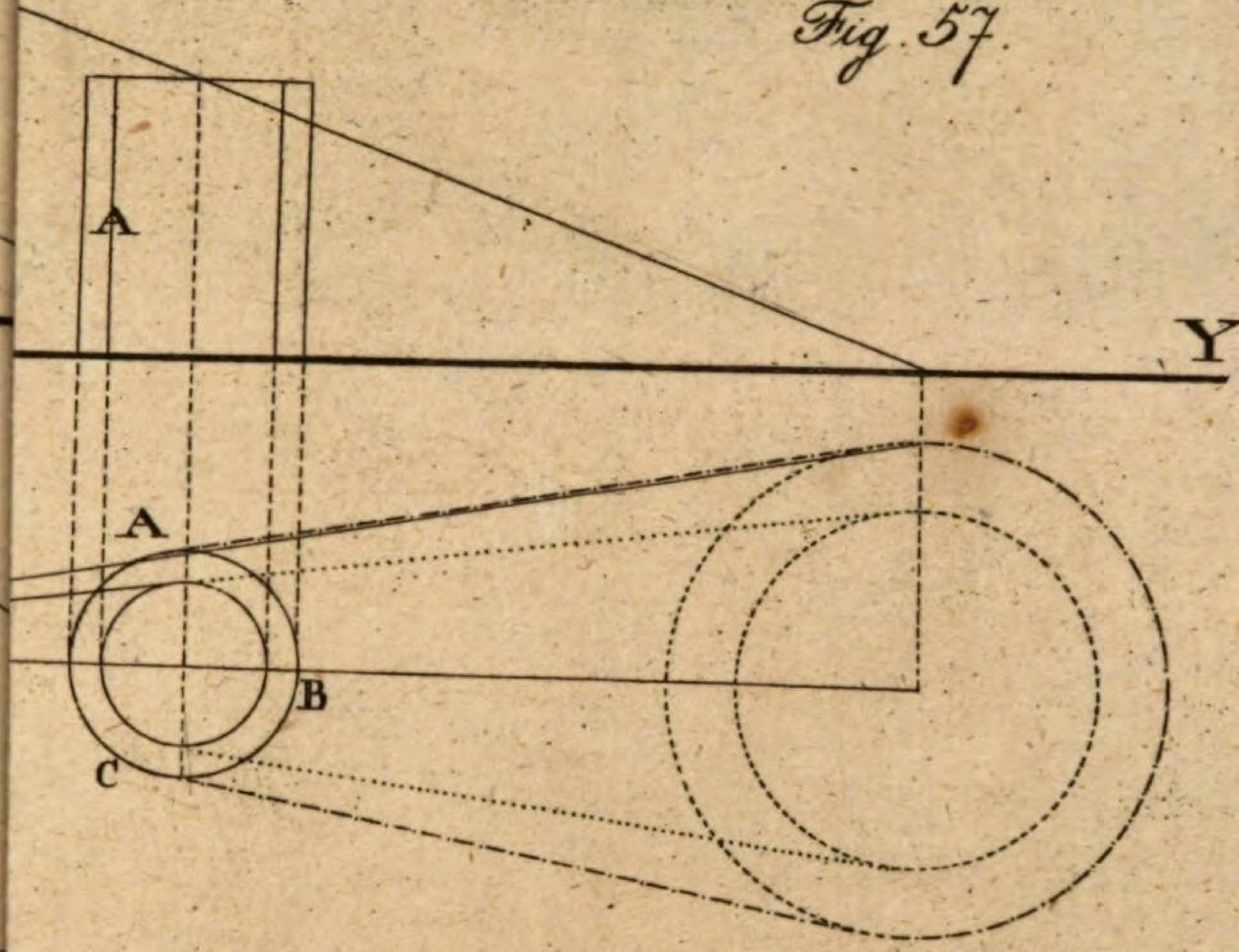
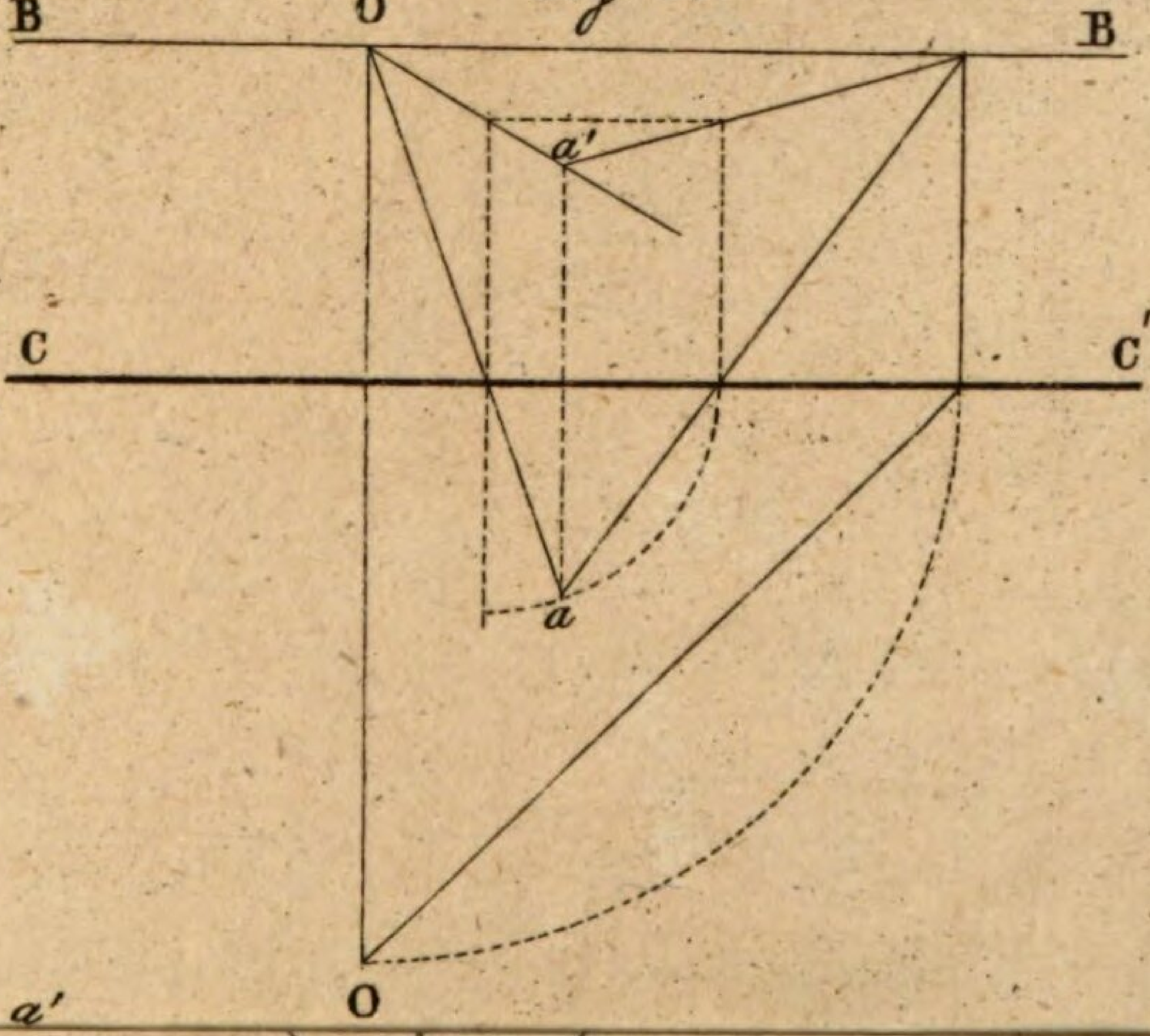
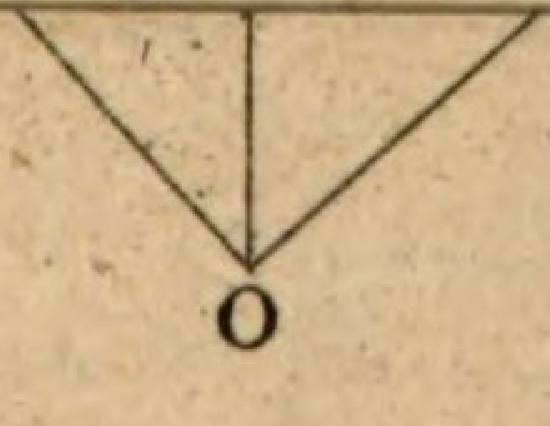


Fig. 61.

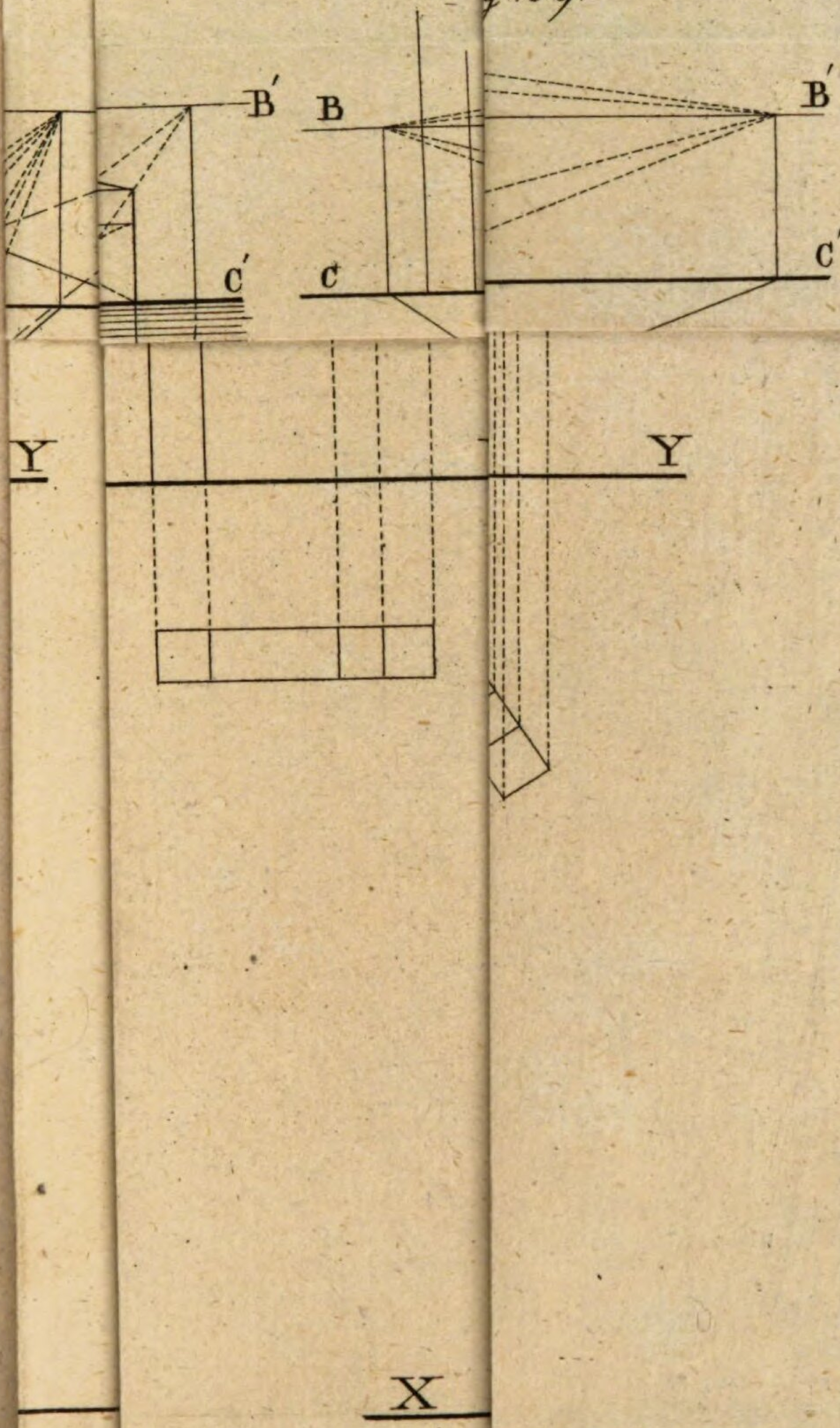




ne abgewandt sind jene Theile des Schattens (vorzüglich für Lampen,
em em rechten Winkel sich mehr nähernden tritt obschon diese Theile
d ab cht die Verlängerung demselben gleich und denkt sich das Licht rückwärts
deundebene getragen, und der Rand des Waßerspiegels als Conductrix eines
D

M. Bauer sc.

…g. 69



…den … durch diesen Punct au…
…den … izontal Ebene zusam…
…sucht

M. Bauer sc.

Taf. VII

M. Bauer sc.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Arbesser, Joseph

Constructions-Lehre mit ihren Anwendungen auf Schatten-Construction, Perspectiv- und Maschinenzeichnung als Vorbereitung zu Monge's und Hachette's Werken

Wien 1824

Math.a. 7 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080489-4